EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

NR.6

JAARGANG 94 - MEI 2019

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

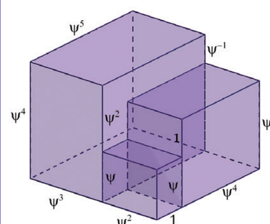
INHOUDSOPGAVE

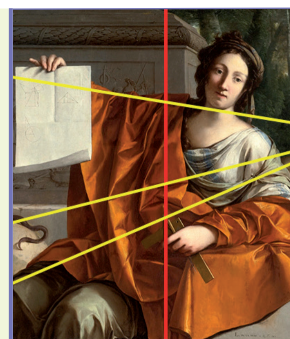
EUCLIDES JAARGANG 94 NR6



IN DIT NUMMER







Atomium, Brussel (1958). Ontwerpers: Jean Polak en André Polak

Foto: Henk Rozenhart

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

Kort vooraf

Regelmatig komen er artikelen binnen waar je meteen iets mee kunt doen. In de klas maar ook daarbuiten. Het overkwam mij met 'Metalen gemiddelden' van Luuk Koens in deze *Euclides*. Dat artikel gaat over het plastische getal ψ, zo genoemd door Dom Hans van der Laan, een architect van de Bossche School.
Nu heb ik een bovengemiddelde interesse in architectuur (zoals je wellicht is opgevallen door de voorkanten van de *Euclides* van de afgelopen jaren...), waardoor ik tijdens het redigeren van het artikel al in het werk van Dom Hans van der Laan (en zijn leerlingen) ben gedoken. Niet lang daarna kwam het verzoek om een A-viertje te maken voor het afscheidsboek van iemand met wie ik de interesse voor architectuur deel. Dat is, na een korte inleiding over ψ, een routebeschrijving geworden langs een aantal Bossche School objecten in Brabant en Limburg. Dus mocht je na het lezen van 'Metalen gemiddelden' op pad willen: ik stuur je de route graag toe!
Een artikel waar je in de klas meteen iets mee kunt doen is 'Omgaan met verschillen in de wiskundeles' van het MaSDiV team. MaSDiV is een Europees Erasmus+ project waarin lesactiviteiten worden ontwikkeld die alle leerlingen bij de les betrekken, ongeacht hun prestatieniveau en culturele of sociaal-economische achtergrond. Maar let vooral op de oproep aan het einde: onderdeel van het project is een (gratis) cursus voor docenten van vwo, havo en vmbo, die ook in het najaar weer wordt aangeboden.
Maar er zijn vast nog meer artikelen die inspireren om er iets mee te gaan doen in of buiten de klas. En misschien vind je het wel een uitdaging om daar een keer een artikel over te schrijven... Wij houden ons van harte aanbevolen!

Tom Goris

OMGAAN MET VERSCHILLEN IN DE WISKUNDELES

Amy Mol
Michiel Doorman
Vincent Jonker
Monica Wijers

Tijdens het Europese project *MaSDiV* zijn wiskundige lesactiviteiten ontwikkeld gericht op het omgaan met verschillen tussen leerlingen in de klas. In dit artikel worden drie van deze activiteiten besproken.

Inleiding

De verschillen tussen leerlingen op scholen zijn groot en groeien nog meer sinds de invoering van 'passend onderwijs' en door de toegenomen immigratie. Iedere docent is daarom bekend met de vraag: Hoe geef je je (wiskunde)les vorm zodat iedere leerling bij de les wordt betrokken en enthousiast wordt voor het vak?
In het Europese project *MaSDiV* [1] worden lesactiviteiten ontwikkeld die erop gericht zijn om alle leerlingen bij de les te betrekken, ongeacht hun prestatieniveau en culturele of sociaal-economische achtergrond. In het huidige onderwijs biedt men deze leerlingen vaak alternatieve en/of extra activiteiten aan. *MaSDiV* richt zich daarentegen op de ontwikkeling van lesactiviteiten waarbij alle leerlingen betrokken zijn. De lesactiviteiten zijn gebaseerd op drie (in sterke mate gerelateerde) onderwijsbenaderingen: onderzoekend leren, het gebruik van betekenisvolle contexten en taalgericht vakonderwijs. Onderdeel van het project is een cursus voor docenten 'Omgaan met verschillen in de bètavakken' die in Nederland wordt aangeboden via U-talent.[2] Tijdens deze cursus verdiepen docenten zich in de drie onderwijsbenaderingen en de door het projectteam ontwikkelde lesactiviteiten. Vervolgens ontwerpen de docenten eigen lesactiviteiten die ze uitproberen in de klas. In dit artikel beschrijven we drie van deze lesactiviteiten, die ieder prototypisch zijn voor één van de drie onderwijsbenaderingen.

Schuiven met machten

In figuur 1 staat een voorbeeld van een lesactiviteit die tijdens de cursus door één van de deelnemende docenten is ontwikkeld. Dit type activiteit heet een 'matching'-activiteit en is gebaseerd op onderzoekend leren. De lesactiviteit is ontworpen voor leerlingen in de brugklas van het vwo. Het doel van de activiteit is dat leerlingen de regels voor machten onderzoeken en verbanden tussen de verschillende representaties van deze regels ontdekken en verwoorden.
Aan het begin van de les krijgen de leerlingen de kaartjes losgeknipt in een enveloppe. In twee- of drietallen kunnen

$x^2 \cdot x^3$	x^{2+3}	3·3·3·3·3	3^5	X^5	243
$(x^2)^4$		(3·3) · (3·3) · (3·3) · (3·3)	3^8	X^8	6561
$(xy)^3$	$xy \cdot xy \cdot xy$	(2·3) · (2·3) · (2·3)	$2^3 \cdot 3^3$	$x^3 \cdot y^3$	216
$x^4 : x^4$	x^{4-4}	$\frac{3\cdot3\cdot3\cdot3}{3\cdot3\cdot3\cdot3}=\frac{1}{1}$		X^0	1
$x^0 : x^4$	x^{0-4}	$\frac{1}{3\cdot3\cdot3\cdot3}=\frac{1}{3^4}$	3^{-4}	X^{-4}	$\frac{1}{81}$
$x^6 + x^2$	Kan niet korter	3·3·3·3·3·3 +3·3	3^6+3^2	$\neq X^8$	
	x^{6-2}	$\frac{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3}{3\cdot3}=\frac{3^4}{1}$	3^4	X^4	81

figuur 1 De opdracht 'Maak sets van de verschillende regels bij het rekenen met machten'

ze gaan schuiven om uiteindelijk zeven sets van zes kaartjes te maken. Vervolgens maken ze de incomplete sets af door op de lege kaartjes te schrijven. Leerlingen mogen bij de opdracht gebruik maken van kladpapier, een rekenmachine en hun boek. Aan het eind van het lesuur schrijven de leerlingen de door hun gevonden sets over op een invulblad.
In de volgende les kunnen de invulbladen worden opgehangen. Leerlingen kunnen elkaars resultaten bekijken en onderzoeken of hun argumenten en werkwijzen verschillen. De activiteit is bedoeld als verkennende opdracht aan het begin van het hoofdstuk, maar kan eventueel ook worden gebruikt als activerende lesvorm voor bijvoorbeeld een herhaling van het hoofdstuk. Deze opdracht is uitgeprobeerd op het Titus Brandsmalyceum in Oss in een gymnasium 1 klas en geobserveerd als onderdeel van het *MaSDiV*-project. Tijdens de les zagen we grote verschillen in de werkwijzen van de groepjes. Sommige leerlingen begonnen lukraak alles uit te rekenen en wisten daardoor de getalvoorbeelden snel te koppelen. Andere leerlingen gingen meer gestructureerd aan het werk. Een van deze groepjes voerde daarbij een wiskundige discussie van hoog niveau - voor een brugklas - over de relaties tussen de verschillende representaties. De werkwijze van deze

leerlingen is te zien in figuur 2. Ondanks (of eigenlijk dankzij) de verschillen tussen de gebruikte strategieën lukte het alle groepjes om één of meerdere sets te maken voor het eind van de les.

figuur 2 Aanpak van leerlingen bij 'Maak sets over de verschillende regels bij het rekenen met machten'

Onderzoekend leren

'Onderzoekend leren is een leerproces waarin leerlingen een onderzoekende rol hebben en zelf actief betrokken zijn bij de ontwikkeling van kennis en vaardigheden'.[3] De docent heeft hierbij een begeleidende rol. Lesactiviteiten die gebaseerd zijn op onderzoekend leren hebben een open karakter, waardoor er ruimte ontstaat voor verschillende oplosstrategieën.
Onderzoek heeft aangetoond dat onderzoekend leren leidt tot beter begrip van de bèta-inhoud[4] ongeacht de achtergrond van leerlingen.[5] Dit maakt onderzoekend leren uitermate geschikt voor het omgaan met verschillen in de klas. De activiteit 'schuiven met machten' is met zijn open karakter een goed voorbeeld van onderzoekend leren. Het leerlingenwerk van de activiteit laat zien dat de leerlingen de ruimte krijgen om verschillende oplosstrategieën toe te passen, waardoor de activiteit toegankelijk is voor leerlingen van verschillende niveaus.

Het zout op de pizza

De tweede - door een scheikundedocent ontwikkelde - lesactiviteit gaat over het zoutgehalte in pizza. Deze activiteit is ontworpen voor leerlingen van 3 vwo voor het vak scheikunde, maar is door zijn interdisciplinaire opzet zeker inzetbaar bij een wiskundeles gericht op procenten en verhoudingen. Het doel van de activiteit, wanneer hij wordt ingezet in de wiskundeles, is dat leerlingen hun kennis en vaardigheden rond procenten en verhoudingen leren inzetten in een nieuwe context: het zoutgehalte in pizza. Deze context is sterk verbonden aan hun persoonlijke ervaringen en kennis.
Voorafgaand aan de activiteit hebben leerlingen de opdracht gekregen om in de supermarkt het zoutgehalte van drie verschillende pizza's op te zoeken en deze informatie mee te nemen naar de les. Aan het begin van de les krijgen de leerlingen een tekst van de consumentenbond over de invloed van zout op het lichaam en de ADI (Aanvaardbare Dagelijkse Inname) van zout. Hierna gaan ze rekenen met de getallen uit de tekst en de informatie die ze in de supermarkt hebben gevonden.
In figuur 3 staan twee voorbeelden van het type vragen dat ze hierbij moeten beantwoorden. De uiteindelijke opdracht is om van elk van de pizza's uit te rekenen in welke mate het zoutgehalte binnen of buiten de ADI valt. Leerlingen ronden de opdracht af door een folder te maken. Hierin geven ze informatie over de invloed van het eten van pizza op de gezondheid.

b. De gezondheidsraad vermeldt de ADI in gram. Wetenschappers doen dit in gram per kg lichaamsgewicht. Waarom kun je beter de wetenschappelijke uitdrukking gebruiken?

Roberto eet een pizza. Op de doos staat dat deze 1,98 gram natrium bevat.
c. Hoeveel procent van de door de gezondheidsraad gegeven ADI krijgt Roberto binnen als hij de hele pizza opeet? Gebruik hierbij de rekenregel die de consumentenbond aangeeft.

figuur 3 Voorbeeldvragen uit de opdracht: 'Pizza opdracht – vergiften of overdaad?'

Deze les is uitgeprobeerd in een 3 vwo-klas van het Kalsbeek College in Woerden. De leerlingen vonden het leuk en werden enthousiast over het feit dat ze zelf op zoek mochten in de supermarkt naar de gegevens die nodig zijn voor de opdracht. De verwerking van deze informatie in de daaropvolgende les en het maken van de folder was voor alle leerlingen goed te doen.

Contexten

In contextgericht onderwijs worden contexten en toepassingen uit de wetenschap gebruikt als startpunt voor de ontwikkeling van wetenschappelijke kennis.[6] Het Nederlandse (wiskunde)onderwijs is reeds doordrongen van contexten in lesboeken en ook in de docentenopleidingen is er aandacht voor. Het *MaSDiV*-project richt zich op een verrijking hiervan met de ontwikkeling van lesactiviteiten binnen interdisciplinaire en/of multiculturele contexten. In deze lesactiviteiten staat de ontwikkeling van wetenschappelijke geletterdheid centraal, met speciale aandacht voor maatschappelijke dilemma's.

De pizza-activiteit is inzetbaar bij scheikunde, nask en wiskunde, en richt zich op de gezondheidsproblemen die spelen bij het eten van zout. Door deze interdisciplinaire betekenisvolle context leren de leerlingen verbindingen te maken tussen verschillende soorten kennis, zoals de vakkennis van scheikunde, wiskunde, en hun persoonlijke ervaringen. De betekenisvolle context zorgt er daarnaast voor dat leerlingen een kader hebben voor de kennis die ze opdoen. Hierdoor zijn ze beter in staat de kennis in andere situaties toe te passen. Verschillen tussen leerlingen zijn bij dit type lesactiviteit geen obstakel maar een bron van informatie, omdat ieder zijn eigen ervaringen in kan brengen.

Wiskundige begrippen

Woord		Foto/tekening
Komt voor in:		
Betekenis of vertaling		
Voorbeeldzin		
= Hetzelfde		
≠Tegenovergestelde of wat het niet is		
Woorden die erbij horen		

figuur 4 De opdracht: 'Vul de tabel in voor een wiskundig begrip uit de lijst'.

In figuur 4 staat een voorbeeld van een lesactiviteit gebaseerd op taalgericht vakonderwijs. De lesactiviteit is ontworpen voor leerlingen van het mbo, niveau 3, maar is goed inzetbaar op alle niveaus, inclusief de verschillende klassen in het voortgezet onderwijs.
Het doel van de activiteit is dat leerlingen een dieper en vollediger inzicht krijgen in verschillende wiskundige begrippen en hun samenhang.
Bij deze activiteit vullen de leerlingen de tabel uit figuur 4 in voor verschillende wiskundige begrippen. De opdracht wordt aan het begin van de les uitgelegd aan de hand van een voorbeeldbegrip met ingevulde tabel. Vervolgens vullen de leerlingen in twee- of drietallen voor tien (door hen gekozen) begrippen de tabel in. Ze mogen hierbij vragen stellen aan hun docent en gebruik maken van hun boek en internet. In de volgende les presenteren de groepen een aantal van de door hen ingevulde tabellen aan de klas. Leerlingen krijgen hiermee inzicht in de werkwijze van de andere groepen en de diepgang waarmee ze de begrippen hebben onderzocht. Afhankelijk van de tijd, het doel en de groepsgrootte kan dit ook in de vorm van een posterpresentatie plaats vinden. Deze activiteit is uitgeprobeerd op het ROC Da Vinci College, locatie Zwijndrecht. Het leerlingenwerk laat grote verschillen zien in zowel de diepgang als de invalshoek.

In figuur 5 staan twee door leerlingen ingevulde tabellen die dit verschil illustreren. Alle groepen waren in staat de begrippen duidelijk te presenteren aan de klas, onafhankelijk van de werkwijze en diepgang.

Woord	kwart	Foto/tekening
Komt voor in:	Reken en taarten	
Betekenis of vertaling	Helft van de helft	1/4
Voorbeeldzin	Jorren heeft 3 kwart op van de taart	
= hetzelfde	Jorren zit vol	
≠Tegenovergestelde of wat het niet is	Het is geen helft	3/4
Woorden die erbij horen	Hele helft kwart 3 kwart	

Woord	Grafiek	Foto/tekening
Komt voor in:	Wiskunde	inhoud (liter)
Betekenis of vertaling	Een visuele voorstelling in een plat vlak van een functie	
Voorbeeldzin	Maak een grafiek bij deze Tabel	K
= hetzelfde	Een visuele voorstelling in een plat vlak van een functie	tijd
≠Tegenovergestelde of wat het niet is	Tabel	
Woorden die erbij horen	Plat vlak, functie	

figuur 5 Aanpak van leerlingen bij 'Vul de tabel in voor een wiskundig begrip uit de lijst'

Taalgericht vakonderwijs

In taalgericht vakonderwijs let de docent zowel op de vakspecifieke doelen als op de benodigde taalvaardigheid voor het vak. Hij stelt daarvoor ook vakspecifieke taaldoelen op. De ontwikkeling van deze taalvaardigheid gebeurt in interactieve, contextrijke vaklessen, waarbij de benodigde taalsteun wordt geboden.[7] Deze omschrijving zien we duidelijk terug in de hierboven beschreven activiteit.
De docente die deze activiteit ontwikkelde, heeft, zoals vaak op het mbo, klassen met veel studenten met een migratieachtergrond. Onderzoek van Cito in 2015 laat zien dat de wiskunderesultaten van deze studenten in Nederland achterblijven bij die van studenten zonder migratieachtergrond. Dit kan deels worden verklaard door de taalachterstand (in Nederlands) die deze studenten hebben. De bovenstaande opdracht geeft de docente inzicht in de (wiskundige) taalvaardigheid van de verschillende studenten en breidt tegelijkertijd hun taalkennis uit. De opdracht is hiermee erg geschikt voor het omgaan met (grote) verschillen in taalniveau in de klas.

Cursusmateriaal en -aanbod

De *MaSDiV* nascholingscursus is in Europees verband ontworpen, getest en geëvalueerd. De cursusmodules, geschreven voor docentopleiders, zijn openbaar beschik-

baar op de website van het MaSDiV-project.[1] De lesactiviteiten die door het projectteam zijn ontwikkeld staan inmiddels online.[8] De hierboven besproken lesactiviteiten zijn tevens online beschikbaar.[9]
De nascholingscursus wordt in de komende jaren nogmaals gegeven. Houd hiervoor de website van U-talent[2] in de gaten. Tijdens de NWD25 zijn door leden van het *MaSDiV*-team drie workshops georganiseerd gericht op multicultureel wiskundeonderwijs.

Noten

[1] Volledige titel: Supporting Mathematics and Science teachers in addressing Diversity and promoting fundamental Values. Zie www.masdiv-project.eu

[2] Zie *https://u-talent.nl/activiteit/omgaan-verschillen-betavakken/*

[3] Doorman, M., van der Kooij, H., & Mooldijk, A. (2012). Denkactiviteiten, onderzoekend leren en de rol van de docent. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs, 31*(4), 9-12. Zie: *www.fisme.science. uu.nl/wiskrant/artikelen/314/314juni_doorman-vander-kooij-mooldijk.pdf*

[4] Minner, D.D., Levy, A.J. & Century, J. (2010). Inquiry-based science instruction: What is it and does it matter? Results from a research synthesis years 1984 to 2002. *Journal of Research in Science Teaching* 47(4). 474-496. Zie: *http://dx.doi.org/10.1002/tea.20347.*

[5] Wilson, C.D., Taylor, J.A., Kowalski, S.M., & inquiry-based and commonplace science teaching on students' knowledge, reasoning, and argumentation. *Journal of Research in Science Teaching,* 47(3), 276–301.

[6] Bennett, J., Lubben, F., & Hogarth, S. (2007). Bringing science to life: A synthesis of the research evidence on the effects of context-based and STS approaches to science teaching. *Science Education,* 91(3), 347-370.

[7] Hajer, M. & Meestringa, T. (2009). *Handboek taalgericht vakonderwijs.* Bussum: Coutinho.

[8] Zie: *www.fisme.science.uu.nl/publicaties/subsets/masdiv_nl*

[9] Zie: *https://elwier.nl/masdiv/*

Over de auteurs

Amy Mol, Michiel Doorman, Vincent Jonker en Monica Wijers zijn werkzaam bij het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht en zijn alle vier betrokken bij het Europese project *MaSDiV.*
E-mailadressen: *a.mol@uu.nl,m.doorman@uu.nl, v.jonker@uu.nl, m.wijers@uu.nl.*

BELEEF DE WERELD VAN

ESCHER







Maurits Cornelis Escher was bepaald geen ster in wiskunde. Toch is zijn band met de wiskundige gemeenschap al heel oud en ook heel bestendig. Escher is een kunstenaar die werelden weet te verbinden die elkaar van oudsher moeilijk kunnen vinden: de kunst en de wetenschap. U kunt die band zelf ontdekken. Kom samen met uw leerlingen naar Escher in Het Paleis en laat ze een duik nemen in zijn wonderlijke wereld. Een wereld waar u samen nog lang over na kunt praten!

Volgens Escherkenner professor Doris Schattschneider was Escher een 'intuïtieve wiskundige'. Door het steeds weer proberen en uitwerken van ideeën kwam hij tot verrassende oplossingen. Geïnspireerd en gesteund door wiskundigen als Lionel en Roger Penrose en Donald Coxeter, leidde dit tot prenten als *Klimmen en dalen*, *Waterval* en de vier *Cirkellimieten*. En natuurlijk zijn vele regelmatige vlakverdelingen vol vogels, vissen, insecten en andere beestjes. Ontdek zijn passie voor regelmatige patronen, ingewikkelde structuren en onmogelijke ruimten. Ontdek Eschers oneindige universum!

Bij reservering ontvangt u: een Wiskundepakket & een Kijkwijzer waarmee de leerlingen door het museum kunnen wandelen.

Tegen betaling en op aanvraag bij te boeken: rondleiding met gids, workshop.

Workshops | Scholen uit de regio Den Haag: workshops zijn te reserveren via Cultuurmenu. (cultuurmenu.nl/voortgezetonderwijs)

Workshops | Scholen uit andere regio's: informatie over de Workshops en prijzen zijn op te vragen via *info@escherinhetpaleis.nl*



Lange Voorhout 74, 2514 EH Den Haag
| 070-4277730 | info@escherinhetpaleis.nl

ENTREE
€ 5,50 per leerling
per 10 leerlingen is een begeleider gratis.

DE HOEKSTREEP

EEN STOOP IN EEN MENGEL



Jan Beuving

In aflevering *n* van het Brexitdebat, enkele weken geleden, hoorde ik een leuke Engelse uitdrukking. (Deze column wordt ruim voor je hem leest geschreven; vergeef me als in de tussentijd Groot-Brittannië toch in de EU is gebleven, een harde Brexit heeft doorgevoerd, gezonken is of uitstel heeft aangevraagd. Overigens ben ik er voorstander van om de Brexit elke dag één dag uit te stellen. Niemand kan daar een probleem mee hebben, want wat is nu één dag?, en dan kunnen we met inductie bewijzen dat van uitstel afstel komt.)

Maar nu die uitdrukking. *You cannot get a quart into a pint pot.* Jacob Rees-Mogg, die eruitzag zoals je van iemand met die naam mag verwachten, gebruikte hem. Rees-Mogg zei het om aan te geven dat er te veel moest gebeuren in te korte tijd. Ik moest het opzoeken, want ik verstond eerst 'court' in plaats van 'quart'. Die *quart* is, net als de *pint*, een oude Engelse inhoudsmaat. De pint wordt nog gebruikt in de pubs, maar de quart is uitgestorven. Maar niet in de taal, zoals bij ons soms ook het geval is. De kwartjes kunnen nog altijd vallen, ook al is in de portemonnee het doek voor de kwartjes gevallen.

> 'YOU CANNOT GET A QUART INTO A PINT..'

Een quart is precies twee keer een pint, en als zodanig ruim een liter. Een pint is 20 fl oz, oftewel 20 fluid ounces. Dat wil zeggen: in het Britse systeem. Amerikaanse pints bestaan uit 16 fl oz. Dit betekent niet dat de Amerikaanse pint kleiner is: de fluid ounce is in Amerika groter. Als je leerlingen gek wilt krijgen, moet je vooral rekensommetjes over de verschillen tussen deze twee meetsystemen opgeven. Anderzijds: nu de rekentoets is afgeschaft, kunnen ze wel weer wat hebben.

Wie probeert om een quart in een pint pot te krijgen, probeert dus iets onmogelijks (met een factor twee). Ik kon zo snel in het Nederlands geen equivalente uitdrukking vinden. Een eetlepel in een theelepel? Als we in de kroegsfeer blijven, kun je geen vaasje in een fluitje gieten. Alleen is dan de verhouding niet 2:1. Bekijk je oude Nederlandse drankmaten, dan zou het zijn: 'je kunt geen stoop in een mengel krijgen'.

We kennen wel spreekwoorden waarin twee verschillende hoeveelheden figureren in verhouding tot elkaar. Bij 'vijf kwartier in een uur praten' en 'dertien in een dozijn' is ook sprake van 'proppen': je probeert een grotere hoeveelheid in een kleine te krijgen, om zo iets van de onmogelijkheid aan te geven. Ook het Engelse 'eight days a week' vindt in het Nederlands weerklank als 'acht dagen in de week', en eveneens gangbaar is '25 uur in een dag'. Wat opvalt is dat het overschot in deze spreekwoorden altijd 1 is. 13 in 12, 25 in 24 (uur), 8 in 7 (dagen), en 5 in 4 (kwartier). Waarschijnlijk omdat dan het duidelijkst is dat het net niet past, waardoor je het wringen bijna voelt. Bij die quart en die pint hoor je dat minder, maar daar is een visuele component: je ziet dat grote en kleine glas voor je.

Bij vijf kwartier in een uur is de onmogelijkheidsfactor 1,25 (5/4), bij acht dagen per week 1,142857..., bij dertien in een dozijn 1,08333... en 25 uur in een dag komt neer op 1,041666... Dat is al bijna niet meer ondoenlijk. Sterker nog: als het wintertijd wordt, lukt dat al. Het lijkt me duidelijk dat de limiet hier bij 1 ligt, maar waar ligt de limiet aan de andere kant? Wat is het onmogelijkste spreekwoord?

Ik moet gelijk aan het lied *Four Seasons in One Day* denken, van de Australische band Crowded House. De titel was een gangbare uitdrukking in Melbourne, waar het weer nogal veranderlijk kan zijn. 'Crowded' is het huis van deze taal zeker: als je vier seizoenen in een dag stopt, heb je het over een factor 365! Jammer eigenlijk dat het lied in 1991 uitkwam – een jaar later was de factor 366 geweest.

Over de auteur

Jan Beuving is wiskundige en cabaretier. Hij toert door het land met zijn nieuwe voorstelling *Rotatie*.
Kijk voor de speellijst op *www.janbeuving.nl.*

RIJTJES MET WITTE EN ZWARTE BALLEN III

Rob Bosch

Wiskunde, gewoon omdat het mooi is. Rob Bosch bedrijft wiskunde met witte en zwarte ballen en schrijft daar een serie miniaturen over.

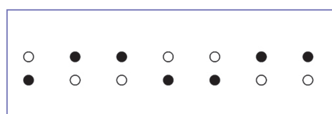


We maken rijtjes van witte en zwarte ballen met de beperking dat de volgende twee configuraties daarin niet mogen voorkomen.



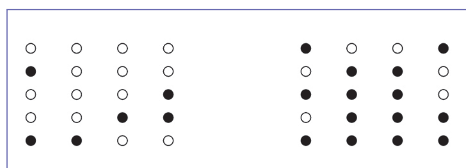
figuur 1

Afgezien van mogelijk de eerste en de laatste bal in het rijtje heeft iedere bal dus minstens één buur van gelijke kleur. Voor zeven ballen zijn bijvoorbeeld de volgende rijtjes toegestaan, zie figuur 2.



figuur 2

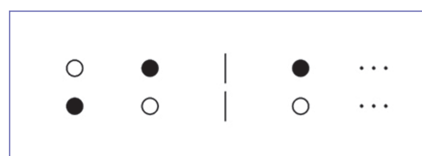
Hoeveel van deze rijtjes kunnen we maken met n witte en zwarte ballen? Voor $n = 1$ en $n = 2$ zijn dat er respectievelijk twee en vier, want hierin komen de verboden configuraties uiteraard niet voor. Voor $n = 3$ vinden we zes rijtjes; de $2^3 = 8$ mogelijke rijtjes minus de twee verboden rijtjes.
Voor $n = 4$ vinden we de volgende tien rijtjes, zie figuur 3.



figuur 3

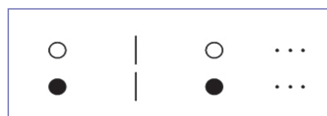
Als we het aantal rijtjes met n ballen aangeven met r_n dan vinden we voor $n = 1, 2, 3, 4$ respectievelijk $r_1 = 2$, $r_2 = 4$, $r_3 = 6$ en $r_4 = 10$. Er tekent zich een bekend patroon af. We gaan hieronder na of dat, door de lezer wellicht al ontdekte patroon, zich doorzet.

Een aantal rijtjes van n ballen begint met zwart-wit (● ○) of wit-zwart (○ ●). In het eerste geval moet de derde bal dan wit zijn, in het tweede geval moet er een zwarte bal volgen, zie figuur 4.



figuur 4

We kunnen het zwart-wit-begin vervolgen met een toegestaan rijtje van $n – 2$ ballen dat met een witte bal begint. Het wit-zwart-begin kunnen we vervolgen met een toegestaan rijtje van $n – 2$ ballen dat met een zwarte bal begint. Er zijn dus in totaal r_{n-2} rijtjes die met twee ballen van verschillende kleur beginnen. We kijken nu naar de rijtjes die beginnen met twee ballen van dezelfde kleur, zie figuur 5.



figuur 5

Als een rijtje van n ballen begint met twee witte of twee zwarte ballen dan kunnen we na een eerste zwarte bal een toegestaan rijtje van $n – 1$ ballen toevoegen dat begint met een zwarte bal. Als het rijtje van n ballen begint met een witte bal dan voegen we een toegestaan rijtje van $n – 1$ ballen dat begint met een witte bal toe. In totaal zijn er dus r_{n-1} rijtjes die beginnen met twee ballen van dezelfde kleur. We vinden zo:
$r_n = r_{n-1} + r_{n-2} \qquad n = 3, 4, ...$
Dit is de Fibonacci-relatie. De rij r_n levert echter niet de Fibonaccigetallen op want $r(1) = 2$ en $r(2) = 4$ maar 4 is geen getal in de Fibonaccirij. Vandaar dat de volgende getallen in de rij geen Fibonacci-getallen zijn.

Bij ons probleem hoort de volgende rij:
$r_1 = 2$ $\quad r_2 = 4$ $\quad r_3 = 6$ $\quad r_4 = 10$ $\quad r_5 = 16$
$r_6 = 26$ $\quad \dots$
Hoewel de getallen in deze rij geen Fibonaccigetallen zijn, ontdekken we al snel een relatie met de getallen uit de rij van Fibonacci:
$r_1 = 2 \cdot 1$ $\quad r_2 = 2 \cdot 2$ $\quad r_3 = 2 \cdot 3$ $\quad r_4 = 2 \cdot 5$ $\quad r_5 = 2 \cdot 8$
$r_6 = 2 \cdot 13$ $\quad \dots$

Uit dit patroon leiden we af dat
$r_n = 2F_{n+1}$
waarbij F_{n+1} het $n+1$-de getal in de Fibonaccirij is.
Opmerkelijk dat een rijtje van witte en zwarte ballen met een verboden patroon te maken heeft met de Fibonaccigetallen...

Een rij L_n met beginwaarden $L_1 = a$ en $L_2 = b$ die voldoet aan de Fibonaccirelatie noemen we een Lucas-rij naar de Franse wiskundige Eduard Lucas (1842–1891). Voor $a = b = 1$ krijgen we de Fibonacci-rij. Onze ballenrij is dus een Lucas-rij met $L_1 = 2$ en $L_2 = 4$.

Als we de eerste getallen uit een Lucas-rij opschrijven, zien we een relatie met de Fibonacci-rij.
$a \quad b \quad a + b \quad a + 2b \quad 2a + 3b \quad 3a + 5b$
$5a + 8b$
We zien hierin de Fibonacci-getallen terugkomen.
Na wat gepuzzel vinden we:
$L_n = aF_{n-2} + bF_{n-1} \qquad n = 3, 4, \dots$
$L_1 = a$ en $L_2 = b$

Voor onze ballenrijtjes r_n geldt
$L_1 = a = 2$ en $L_2 = b = 4$ zodat:
$r_n = L_n = 2F_{n-2} + 4F_{n-1} =$
$2(F_{n-2} + F_{n-1}) + 2F_{n-1} =$
$2F_n + 2F_{n-1} = 2F_{n+1}$.

Over de auteur

Rob Bosch was universitair hoofddocent wiskunde aan de Nederlandse Defensie Academie en lid van de redactie van *Euclides*.
E-mailadres: *dr.robbert.bosch@gmail.com*

VIJF VRAGEN AAN...



In de rubriek Vijf vragen aan ... leren we docenten wiskunde beter kennen. Waarom hebben ze voor het vak gekozen? Wat inspireert hen? Hebben ze nog tips voor collega's? Deze keer vijf vragen aan Joop van Dormolen.

Joop van Dormolen

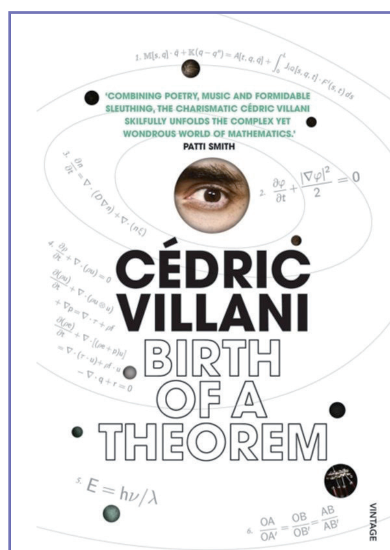
? 1 Wie heeft of hebben de meeste invloed gehad op jouw keuze van een loopbaan in het wiskunde-onderwijs?

Niemand heeft mij aangeraden wiskundeleraar te worden. Ik was meer geïntrigeerd door het feit dat een mens andere mensen iets kon leren zonder dat er iets van een fysieke verbinding (bijvoorbeeld een elektrische kabel) tussen de twee was. Ik wilde leraar worden, maar niet per se voor wiskunde. Ik heb ook nagedacht over Nederlands of geschiedenis. Waarschijnlijk kwam de keus van deze drie vakken omdat ik uitstekende leraren had in wiskunde, Nederlands en geschiedenis. Het is ten slotte wiskunde geworden, omdat dat vak mij het gemakkelijkste afging. Ik was een van de zogenaamde 'Indische' leerlingen, die door de oorlog met Japan een grote achterstand had opgelopen in Japanse concentratiekampen. Na een overbruggingsperiode ging ik naar de toenmalige Dalton-hbs in Den Haag waar het onderwijs zo was ingericht dat een leerling twee lesuren per dag zelf kon werken aan taken en achterstanden.

Na het behalen van de toenmalige wiskundeakten KI en KV en militaire dienst werd ik voor een klein aantal uren benoemd op het Maerlant-lyceum in Den Haag. Daar werd ik snel door leerlingen van de eerste klas onderuit-gehaald, wegens zware ordeproblemen. Het zorgde voor zware twijfels of ik wel leraar zou blijven. Ik ben toen gaan praten met mijn vroegere directeur, Timmers, van de Dalton-hbs. Die heeft me bijna een uur laten praten. Dat ging bijna niet over onderwijs en zeker niet over onderwijs in de wiskunde. Aan het slot zei hij: 'Weet je wat jij moet doen? Jij moet leraar worden.' Ik weet nog niet waarom hij op dat idee gekomen was, maar aan hem heb ik mijn leraarschap te danken. Een ander aan wie ik mijn leven als didactiekdocent te danken heb was prof. Fred. van der Blij, die mij, toen hij me examineerde voor KV aanraadde verder te studeren aan de universiteit en ook een van de begeleiders is geweest bij mijn promotie.

? 2 Welk verhalend boek over wiskunde zou jij je collega's aanraden te lezen?

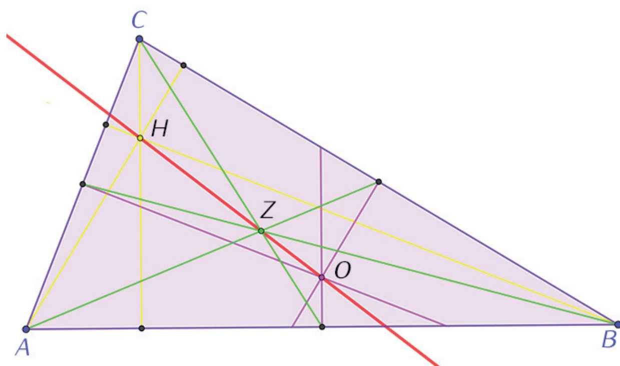
Een boek dat mij fascineert, is een waargebeurd verhaal over het werk van een Franse beroeps-wiskundige Cédric Villani, *Birth of a Theorem – A Mathematical Adventure* (oorspronkelijke titel: *Théorème Vivant*). De wiskunde waar de schrijver mee worstelt is van een te hoog niveau voor mij, maar de worsteling die hij samen met een collega voert is fascinerend. Een prachtig voorbeeld van zoeken, proberen, de verkeerde weg inslaan, vermoeden, triomf, zoals je als leraar je eigen leerlingen zou willen leren werken op hun niveau. Een prachtig voorbeeld over hoe ikzelf zou willen kunnen werken. Niet alleen in wiskunde.



? 3 Welke meetkundige stelling heeft voor jouw schoonheid en verassing?

Martin Kindt is mij voorgegaan in het beant-woorden van deze vraag (*Euclides 94-3*, blz. 8). Net als hij heb ik er talloze, maar net als hij vind ik de negenpuntsstelling van Feuerbach wel een van de meest verrassende: in een driehoek liggen de voetpunten van

de hoogtelijnen, de voetpunten van de zwaartelijnen en de middens van de hoogtelijnstukken (van hoekpunt naar hoogtepunt) op een en dezelfde cirkel. Ik herinner me dat ik het eerst niet kon geloven, maar ik moest wel, want het bewijs is onomstotelijk. Een ander prachtige soortgelijke verrassing was voor mij de rechte van Euler: het hoogtepunt H, het zwaartepunt Z en het middelpunt O van de omgeschreven cirkel van een driehoek liggen op één lijn.



Rechte van Euler

4 Welk kunstwerk moet volgens jou door elke wiskundeleraar gezien worden?
Ik heb geen voorkeur, maar ik zou willen dat mensen, en niet alleen wiskundeleraren, meetkundige vormen zien in natuur en techniek. Niet om daar wiskundige theorie uit te halen (dat is natuurlijk niet verboden), maar vooral om gewoon te genieten van natuurlijk en menselijk vernuft.

5 Welk advies geef jij je collega's?
Ik wil graag herhalen wat ik van Freudenthal, een van mijn grote leermeesters, geleerd heb: 'Luister naar je leerlingen en als je daarmee klaar bent, luister dan nog meer.' Van hen leer je. Niet wiskunde, maar (bijna nog belangrijker) hóe leert iemand; wat gaat er in iemand om die iets wil leren; en wat in iemand die iets niet wil leren...

MEDEDELING

GRATIS TRAINING FORMATIEF TOETSEN

UNIVERSITEIT TWENTE

Zou je graag je leerlingen actiever willen betrekken bij het leerproces? Zou je willen weten hoe jij en je leerlingen meer zicht kunnen krijgen op het leren en de voortgang én hoe je dit in je lespraktijk kan toepassen? Formatief toetsen heeft als doel de docent en leerlingen te informeren over de mate waarin de leerstof beheerst wordt. Formatief toetsen heeft een didactische functie: systematisch informatie verzamelen over het onderwijsleerproces en op basis van deze informatie sturing geven aan het leerproces. Dit kan bijvoorbeeld door het geven van feedback en/of het aanpassen van de instructie aan de leerbehoefte van leerlingen. Formatief toetsen kan leiden tot betere leerprestaties.

Voor het schooljaar 2019/2020 zijn we op zoek naar wiskundeleraren uit de onderbouw van het vo die willen meedoen aan een gratis training formatief toetsen van de Universiteit Twente (vakgroep ELAN). De training is onderdeel van een Europees onderzoek naar de effectiviteit van docentprofessionalisering in formatief toetsen. ELAN heeft deze samen met collega's uit België, Griekenland en Cyprus ontwikkeld. In vijf bijeenkomsten van elk drie uur verspreid over het schooljaar (september 2019 – april 2020) leer je hoe je formatief toetsen kunt inzetten voor de verbetering van je lessen.

Voor meer informatie of aanmelding kun je contact opnemen met Jitske de Vries: *j.a.devries@utwente.nl*

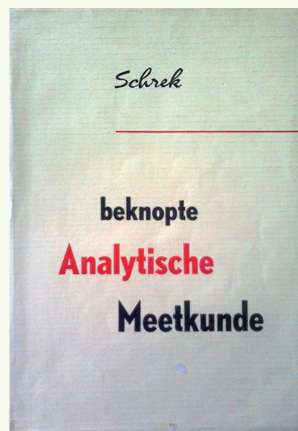
KLEINTJE DIDACTIEK

Lonneke Boels

RAAKLIJN AAN CIRKEL DOOR PUNT OP OF BUITEN CIRKEL

Bij wiskunde B op het vwo is analytische meetkunde een nieuw domein. Voorheen behandelde ik dit bij wiskunde D. Wat mij opviel in zowel *Getal & Ruimte* als *Mathplus*[1] is dat de raaklijn aan de cirkel soms op zo'n omslachtige manier wordt uitgelegd. Bij wiskunde D deden we dat veel sneller en het verbaasde mij dat *Getal & Ruimte* dit niet uit de eigen wiskunde D boeken had overgenomen, op z'n minst als alternatief.[2]

In deze 'Kleintje didactiek' daarom een uitleg over hoe deze methode werkt. Het bewijs van de methode is onder andere te vinden in een boekje van dr D.J.E. Schrek uit 1959 die destijds leraar was aan een gymnasium in Gouda.[3] De methode is bovendien ook toepasbaar op ellipsen en hyperbolen — onderwerpen bij wiskunde D — en met enige aanpassing ook op parabolen. Op de site van collega Herman Hofstede[4] vind je bij het onderwerp 'krommen' een mooi overzicht van alle methoden (waarvan het merendeel ook in Schrek te vinden is).



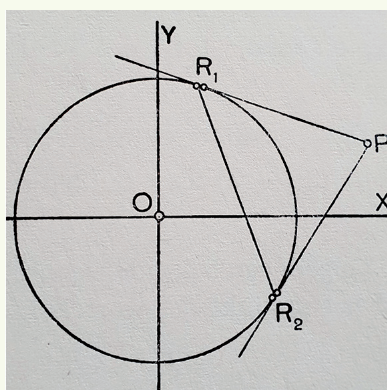
figuur 1 Schrek (1959). *Beknopte analytische meetkunde.* Groningen: Noordhoff NV[5]

Punt A ligt op de cirkel

Eerst een voorbeeld. Gegeven is de cirkel c_1: $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$ en punt $A(7, -1)$ op deze cirkel. De raaklijn door A aan deze cirkel is nu:
k: $(7-3)(x-3) + (-1+4)(y+4) = 25$. Haakjes wegwerken geeft de gevraagde vergelijking in de eenvoudigste vorm. Meer in het algemeen is de raaklijn door een punt A op de cirkel dus:
k: $(x_A - x_M)(x - x_M) + (y_A - y_M)(y - y_M) = r^2$ met $M(x_M , y_M)$ het middelpunt van de cirkel en $A(x_A , y_A)$ het punt op de cirkel en r de straal van de cirkel.

Punt P ligt buiten de cirkel

Als het punt waardoor de raaklijn gaat buiten de cirkel ligt, worden eerst de raakpunten op de cirkel bepaald. Op de wijze als hiervoor beschreven, krijgen we nu namelijk niet de raaklijn door P maar de poollijn van P, zie figuur 1 (Schrek, p. 47). De vergelijking van de poollijn is dus:
m: $(x_P - x_M)(x - x_M) + (y_P - y_M)(y - y_M) = r^2$.
Deze lijn wordt vervolgens gesneden met de cirkel en levert de twee raakpunt R_1 en R_2 op. Daarna wordt hiermee de raaklijn opgesteld zoals hiervoor beschreven bij het punt dat op de cirkel ligt, zie figuur 2.
Voor de ellips en de hyperbool zijn de methoden analoog; ook hiervoor is het bewijs in Schrek te vinden en voorbeelden in de oudere boeken van *Getal & Ruimte*.



figuur 2 Uit: *Beknopte Analytische Meetkunde*

Noten

[1] Andere methoden heb ik niet bekeken.
[2] Zie o.a. de tiende editie van *Getal & Ruimte*.
[3] Met dank aan Martin Kindt die mij een exemplaar ter hand stelde na een discussie met hem over dit onderwerp.
[4] *www.hhofstede.nl*
[5] dr D.J.E. Schrek was ook redacteur van de eerste zes jaargangen van *Euclides* (1924 -1930). Op het boek *Beknopte analytische meetkunde* kan nog geboden worden op de veilingsite van het Wereld Wiskundefonds: *https://veiling.wereld-wiskundefonds.nl/category/schoolboeken/?page=3&limit=80*

DE TANGENSREGEL

Jan Otto Kranenborg

Na de behandeling in 4 vwo van de sinusregel en de cosinusregel was er een leerling, die zich afvroeg of er misschien ook een tangensregel bestaat. Jan Otto Kranenborg antwoordde dat een tangensregel hem onbekend voorkwam en dat hij zou uitzoeken of zo'n regel bestaat. Het was de aanleiding voor een kleine zoektocht en ook voor een invulling van een les, buiten het programma om.

De tangensregel

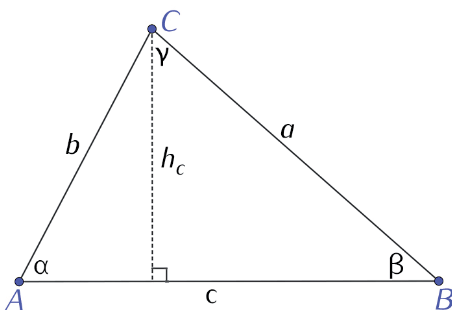
Zo luidt de tangensregel voor een willekeurige driehoek met zijden a, b en c en respectievelijk de overstaande hoeken α, β en γ, dat

(1) $$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\left(\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right)}{\tan\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)}$$

De noemer kan worden herschreven, want
$\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}(180^\circ-\gamma) = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$, zodat (1) overgaat in

(2) $$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\left(\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right)}{\tan\left(90^0-\frac{1}{2}\gamma\right)}=\frac{\tan\left(\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right)}{\cot\left(\frac{1}{2}\gamma\right)}$$

Ik besloot om geen aandacht te besteden aan (2), maar wel aan (1), en noemde dat de tangensregel. Ik legde de regel aan de leerlingen voor met de vraag of zij deze konden bewijzen. Al gauw werd een tekening gemaakt, zie figuur 1, en na een aanwijzing om de hoogtelijn h_c uit C te trekken, gingen de leerlingen op weg.



figuur 1

In driehoek ABC gelden $a=\dfrac{h_C}{\sin\beta}$ en $b=\dfrac{h_C}{\sin\alpha}$.

Dus geldt:

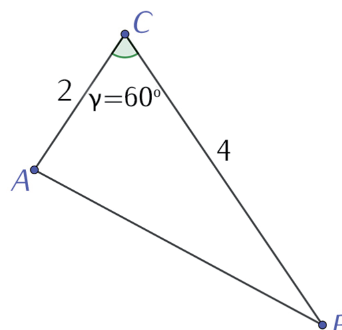
$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\dfrac{h_C}{\sin\beta}-\dfrac{h_C}{\sin\alpha}}{\dfrac{h_C}{\sin\beta}+\dfrac{h_C}{\sin\alpha}}=\frac{\dfrac{h_C\sin\alpha-h_C\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}}{\dfrac{h_C\sin\alpha+h_C\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}}=$$
$$\frac{h_C\left(\sin\alpha-\sin\beta\right)}{h_C\left(\sin\alpha+\sin\beta\right)}=\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}$$

Helaas, de leerlingen kunnen niet verder; de formules van Simson of Mollweide zitten niet meer in het vernieuwde examenprogramma. Dus geef ik deze. De laatste stappen zijn dan niet meer zo moeilijk:

$$\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}=\frac{2\cos\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)\cdot\sin\left(\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right)}=$$
$$\frac{1}{\tan\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)}\cdot\tan\left(\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right)=\frac{\tan\left(\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right)}{\tan\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)}.$$

Als laatste oefening probeerden we helder te krijgen wanneer je een sinus- en/of een cosinusregel zou gebruiken en welke meerwaarde een tangensregel zou kunnen hebben. Na verschillende situaties bekeken te hebben, zette ik deze in een schema (zie: p.17).

Zo kan de tangensregel in situatie 2 gebruikt worden, zie het volgende voorbeeld in figuur 2:



figuur 2

In driehoek ABC is $\angle C = 60^\circ$, $AC = 2$ en BC = 4.
Dan is

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{4-2}{4+2}=\frac{\tan\left(\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right)}{\tan\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)}=\frac{\tan\left(\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right)}{\tan\left(60^0\right)}.$$

	Gegeven	Te vinden		
1	*a*, *b* en *c*	α volgt uit cosregel	β volgt uit sin- of cosregel	γ volgt uit hoekensom △
2	*a*, *b* en γ	*c* volgt uit cosregel	α volgt uit sin- of cosregel	β volgt uit hoekensom △
3	*a*, *b* en α	β volgt uit sinregel	γ volgt uit hoekensom △	*c* volgt uit sin- of cosregel
4	*a*, α en β	γ volgt uit hoekensom △	*b* volgt uit sinregel	*c* volgt uit sin- of cosregel
5	α, β en γ	*a*, *b* en *c* zijn niet te berekenen		

Dus $\frac{1}{3}=\frac{\tan\left(\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right)}{\sqrt{3}}$ zodat

$\tan\left(\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right)=\frac{1}{3}\sqrt{3}=\tan\left(30^0\right)$.

Uit ½(α - β) = 30° en ½(α + β) = 60° volgt dan direct dat α = 90° en β = 30°.
Blijkbaar was driehoek *ABC* rechthoekig.

(Natuurlijk kan dit resultaat ook verkregen worden door gebruik te maken van de cosinusregel:
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) = 4 + 16 - 2\cdot 2\cdot 4\cdot\cos(60^\circ) = 12$
waaruit volgt dat $c = 2\sqrt{3}$.
Vanwege de omgekeerde stelling van Pythagoras moet dan α = 90° en β = 30°).

Een andere bijzondere situatie is dat γ en *a* en *b* gegeven zijn, zodanig dat $\tan\left(90^0-\frac{1}{2}\gamma\right)=\frac{a+b}{a-b}$.

Dan is volgens (1) $\tan\left(\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right)=\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{a+b}{a-b}=1$,

waaruit volgt dat ½(α - β) = 45°.
Uit α + β = 180° - γ en α - β = 90° volgt dan dat α = 135° - ½γ en β = 45° - ½γ.

Merk overigens op dat uit $\tan\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)=\frac{a+b}{a-b}$

volgt dat $\tan(\alpha+\beta)=-\frac{a^2-b^2}{2ab}$,

zodat
$\tan(\gamma)=-\tan\left(180^0-\gamma\right)=-\tan(\alpha+\beta)=\frac{a^2-b^2}{2ab}$.

Voorgaande kan aldus als volgt kort geformuleerd worden:

Voor een driehoek *ABC* met $\tan(\gamma)=\frac{a^2-b^2}{2ab}$

geldt α = 135° - ½γ en β = 45° - ½γ.

De berekening van de derde zijde *c* volgt ook uit de cosinusregel: $c=\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

In andere gevallen kunnen de hoeken α en β slechts benaderd worden.
In die zin moet geconstateerd worden dat de tangensregel eigenlijk nauwelijks meerwaarde heeft. Het is m.i. daarom ook niet nodig om de tangensregel in het wiskunde B curriculum op te nemen.

Over de auteur

Jan Otto Kranenborg is docent wiskunde op het Carolus Clusius College te Zwolle.
E-mailadres: *jokranenborg@hotmail.com*

WORTELS VAN DE WISKUNDE

14: EEN VERHAAL VAN π

Desiree van den Bogaart

In de rubriek *Wortels van de Wiskunde* bespreken Desiree van den Bogaart en Jeanine Daems, geïnspireerd door het door hen vertaalde gelijknamige boek, de mogelijkheden om primaire bronnen te gebruiken in de klas. Deze keer: π.



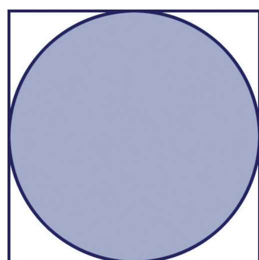
Inleiding

Het getal dat wij π noemen, heeft een lange en afwisselende geschiedenis.[1] In deze aflevering van 'Wortels van de wiskunde' kijken we naar de vroege oorsprong ervan, aan de hand van Egyptische, Babylonische en Griekse bronnen van meer dan tweeduizend jaar geleden. Deze bronnen bieden prachtige kansen om de betekenis en waarde te introduceren in een brugklas, zelfs zonder dat er een decimaal aan te pas hoeft te komen (maar als je dat per se wilt, dan kan de rekenmachine er natuurlijk bij worden gebruikt). We gaan de uitdaging aan om in eerste instantie met vouwblaadjes zo dicht mogelijk bij π te komen. Het laatste stuk van dit artikel is niet meer geschikt voor in een brugklas, maar kan beter bewaard worden tot een iets hoger leerjaar.

De cirkel



figuur 1



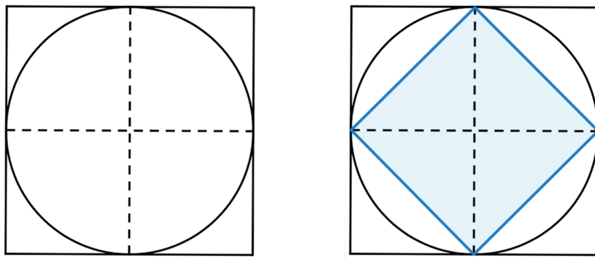
figuur 2

Een cirkel is een van de eenvoudigste vlakke figuren, net als het vierkant. Het zijn basisvormen die je al vindt tussen het speelgoed van zeer jonge kinderen, zoals een vormenstoof (figuur 1). De cirkel is een vorm die ook vertrouwd is vanuit de zichtbaarheid in het dagelijks leven: wielen, klokken, de vorm van de maan, etcetera. Ook in de geschiedenis van de wiskunde kom je cirkels veelvuldig tegen en al in de oudste bronnen.
Als je vierkanten onderzoekt en verschillende vierkanten tekent, kun je eigenschappen ontdekken. Je kunt constateren dat de omtrek altijd precies vier keer zo groot is als de zijde. Wanneer je het concept oppervlakte kent, begrijp je snel dat de oppervlakte van het vierkant gelijk is aan *zijde keer zijde*, misschien al geformuleerd als *zijde kwadraat*. Zouden er ook dergelijke regels bestaan voor omtrek en oppervlakte van cirkels? Merk op dat het concept π zelf hier bewust nog niet expliciet genoemd wordt als doel. We zijn gewoon eigenschappen van de cirkel aan het onderzoeken.

Bij het onderzoeken van cirkels ligt het voor de hand om de diameter / middellijn als referentiewaarde te nemen, net als de zijde van een vierkant. De cirkel laat zich ook mooi omlijsten door een vierkant waarvan de zijde gelijk is aan de middellijn van de cirkel, zie figuur 2. Aansluitend bij de intuïtie die bij het vierkant gebruikt is, zou de omtrek van de cirkel wel eens kunnen samenhangen met de lengte van de diameter. Dan is de vraag: hoeveel keer past de middellijn om een cirkel heen? En is dat voor alle cirkels ongeveer hetzelfde?
Met touwtjes is dit goed uit te zoeken door kinderen zelf en komen ze al snel tot ongeveer drie keer. Met nauwkeuriger werken blijkt dat het iets meer dan drie is. Deze aanpak met touwtjes, om via de omtrek bij het concept π te komen, wordt al regelmatig in de (brug)klas toegepast. Laten we eens kijken of we ook voor de oppervlakte een dergelijke hands-on-benadering kunnen vinden, met hulp van een aantal ideeën uit de geschiedenis.

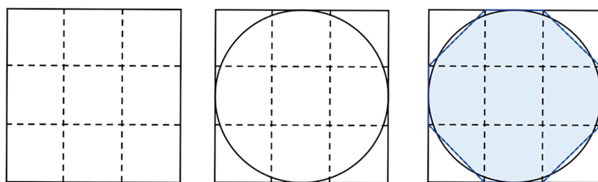
Vouwblaadje

Neem een cirkel en een vierkant dat daar precies omheen past, zoals in figuur 2. De oppervlakte van de cirkel is in ieder geval minder dan *diameter keer diameter*. Als je het vierkant beschouwt als een vouwblaadje, en dit twee keer doormidden vouwt, ontstaan er vier kleinere vierkanten, zie figuur 3 (links). Als je vervolgens alle hoekpunten naar het midden vouwt, zie figuur 3 (rechts), dan blijft de helft van de oppervlakte over. De cirkel is groter dan deze overgebleven helft. Dus de oppervlakte van de cirkel zit tussen de helft en de hele oppervlakte van het vierkant in.



figuur 3

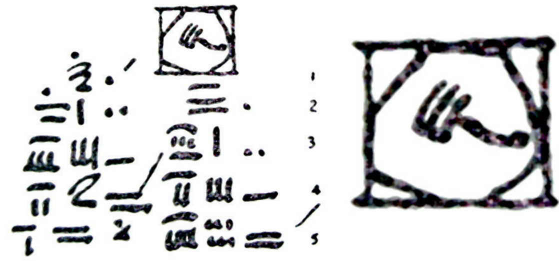
Dit kan als docent al het moment zijn om over te schakelen op het begrip straal, en dan (met wat sturing) leerlingen te laten constateren dat de oppervlakte van de cirkel dus meer is dan *twee keer straal kwadraat* en minder dan *vier keer straal kwadraat*, richting de formule van de oppervlakte van de cirkel zoals die in de school-boeken staat. Als we straks gaan kijken naar het werk van de Egyptenaren, bleven ze echter bij de middellijn als referentie, dus dat blijven wij nu ook nog even doen.
We nemen een nieuw vouwblaadje met ingeschreven cirkel en vouwen dit zo goed mogelijk in negen gelijke vierkantjes, door de zijden in drieën te delen, zie figuur 4.



figuur 4

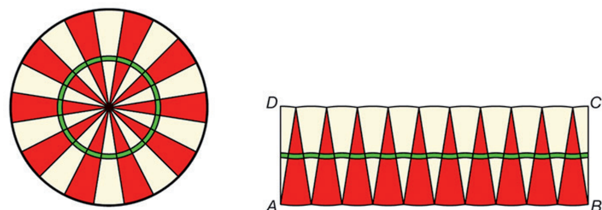
Het grote vierkant is nu verdeeld in negen kleine vierkantjes, waarvan de oppervlakte dus 1/9ᵉ deel van het grote vierkant is. We vouwen de hoekjes nu niet naar het midden, maar we halveren de vier vierkantjes in de hoeken, zodat er een achthoek ontstaat. Het is zichtbaar dat er bij benadering vijf hele kleine vierkantjes binnen de cirkel passen, en ook nog vier halve kleine vierkantjes. Oftewel de oppervlakte van de cirkel komt dicht in de buurt van 7/9ᵉ deel van de oppervlakte van het grote vierkant. De oppervlakte van de cirkel is dus ongeveer *7/9ᵉ deel van diameter keer diameter*. Stel voor het gemak even dat de diameter van de cirkel 1 is, dan is de opper-vlakte van de cirkel dus bij benadering 7/9 × 1 × 1 = 7/9.
In de *Papyrus Rhind*, een verzameling rekenproblemen daterend uit ongeveer 1650 voor Christus, staat een opgave over het berekenen van de oppervlakte van een cirkel, zie figuur 5 (links). Een fragment van de opgave staat ernaast vergroot afgebeeld: het lijkt veel op onze vouwblaadjes uit figuur 4. Op de papyrus wordt een soort rekenrecept gegeven, wat op het volgende neerkomt:

De oppervlakte van een cirkel met een bepaalde middellijn, is gelijk aan de oppervlakte van een vierkant, waarvan de zijde 8/9 van de middellijn van de cirkel is.



figuur 5

Laten we weer even uitgaan van een middellijn van 1, dan is volgens dit Egyptische recept de oppervlakte van de cirkel dus bij benadering gelijk aan (8/9 × 1) × (8/9 × 1) = 64/81.[2] Ons vouwblaadje leverde daarnet 7/9 als benadering. Als we 7/9 anders schrijven is het gelijk aan 63/81, wat nauwelijks verschilt van de Egyptische 64/81.
Dat de oppervlakte van een cirkel samenhangt met de diameter, lijkt even intuïtief als bij de omtrek. Maar dat er sprake is van dezelfde constante voor omtrek en oppervlakte is eigenlijk helemaal niet vanzelfsprekend. Dit is wel met een plaatje aannemelijk te maken, en sommige lesmethoden doen dit ook al, zoals te zien is in figuur 6. Dit zou ook nog concreet uitgevoerd kunnen worden door je leerlingen het vouwblaadje in stukken te laten knippen. Je ziet dan dat de oppervlakte van de cirkel gelijk is aan de oppervlakte van een rechthoek, met als lengte de halve omtrek en als breedte de straal van de cirkel.



figuur 6 Fragment uit hoofdstuk 9 van *Getal & Ruimte* (2012), 1 vwo deel 2

Archimedes (derde eeuw voor Christus) stelt in zijn werk *Het meten van de cirkel*: [3]

De oppervlakte van een cirkel is gelijk aan die van een rechthoekige driehoek, waarvan de ene rechthoekszijde gelijk is aan de straal en de andere rechthoekszijde gelijk is aan de omtrek van de cirkel.

Het is een leuke opgave om ook dit te vergelijken met het plaatje uit *Getal & Ruimte* hierboven, om uiteindelijk in te zien dat dit inderdaad hetzelfde is.

Babylonische benadering

We laten voor het vervolg van dit artikel het vouwblaadje liggen en kijken naar enkele andere fragmenten uit de historie van π. Dit geeft niet zozeer handvatten om de relatie tussen middellijn/straal en oppervlakte/omtrek zelf te laten ontdekken, maar het is wel leuk materiaal voor

het verwerken van de kennis op een afwisselende manier. Op het Babylonische kleitablet YBC 7302 (uit de periode 1800 tot 1600 voor Christus) staat dat er een kwadratisch verband bestaat tussen de omtrek van de cirkel en zijn oppervlakte:[4]

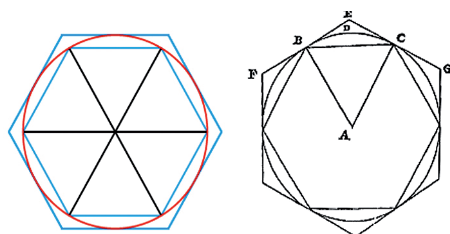
De omtrek in het kwadraat gedeeld door twaalf staat gelijk aan de oppervlakte.

Je kunt je leerlingen laten controleren dat dit overeenkomt met $\pi = 3$. Andere Babylonische kleitabletten geven een waarde van 3; 7, 30 voor π. Met wat kennis van het zestigtallig positiestelsel waarmee zij destijds werkten, geeft dit dus $3 + 7/60 + 30/3600 = 3\ 1/8$ voor π. Een groot kleitablet BM 15285 bevat een hele reeks meetkundeopgaven, waar geen antwoorden bij staan. Een fragment van het kleitablet zie je in figuur 7. Het doet denken aan plaatjes uit een hoofdstuk uit een middelbare schoolboek van nu. Onder het plaatje staat een opdracht. Laat je leerlingen eerst maar eens goed kijken naar hoe de cirkels door elkaar heen getekend zijn. Misschien kunnen ze met een kleurpotlood een paar kopieën inkleuren, om te ontdekken wat wiggen, boten en koeienneuzen zijn. Het berekenen van de exacte oppervlaktes van deze stukjes, zal nog niet meevallen.



figuur 7 De zijde van het vierkant is 1 kabel. <Daarbinnen zijn> 4 wiggen, 16 boten, 5 koeienneuzen. Wat zijn hun oppervlaktes? [5]

We zijn nu de oppervlakte van de cirkel steeds aan het benaderen met behulp van breuken, maar ook wortels kunnen nog helpen in deze zoektocht. Dit laatste stukje vraagt dan wel wat kennis van rekenen met wortels en verhoudingen in bijzondere rechthoekige driehoeken, dus dat leent zich wat beter voor een activiteit in hogere klassen.



figuur 8

Archimedes

We keren weer even terug naar Archimedes. Hij benaderde de omtrek van de cirkel, maar niet met een vierkant, of stukjes vierkant, maar eerst met een ingeschreven en een omgeschreven regelmatige zeshoek, die elk weer worden opgedeeld in zes gelijke driehoeken. We nemen als referentie een straal van 1. Deze straal fungeert dan tevens als zijde van elk van de zes driehoeken (bij de ingeschreven zeshoek) respectievelijk de hoogte van alle zes driehoeken (bij de omgeschreven zeshoek). De omtrek van de ingeschreven zeshoek, zie figuur 8 (links) is precies 6, en (gebruikmakend van de vaste verhouding $1 : \sqrt{3} : 2$ in een $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ driehoek) kom je met de omgeschreven zeshoek tot een omtrek van $4\sqrt{3}$. Daarmee is π ingeklemd tussen 3 en $2\sqrt{3}$. Dat is nog niet zo nauwkeurig als we met het vouwen al waren. Maar Archimedes verdubbelde vervolgens het aantal zijden van de zeshoek en ging rekenen aan de ingeschreven en omgeschreven twaalfhoek. En daarna de 24-hoek, enzovoorts. Hij eindigde bij een afschatting van meer dan $3\frac{10}{71}$ en minder dan $3\frac{1}{7}$ (afgerond 3,14).[6]
In de eeuwen na Archimedes volgden nog enkele andere rekenmeesters zijn voorbeeld, van wie we er tot besluit een paar noemen. Rond het jaar 640 kwam de Indiase wiskundige Brahmagupta op basis van vergelijkbare berekeningen tot de conclusie dat π gelijk moest zijn aan $\sqrt{10}$ (ongeveer 3,16). Daarmee zette hij eigenlijk een stap terug in de benadering van π, want zijn landgenoot Aryabhata was rond 500 al tot een benadering van 62832/20000 (= 3,1416) gekomen. De beroemde Perzische wiskundige Al-Khwarizmi vatte rond 800 alle benaderingen mooi samen, door te zeggen:[7]

een praktisch ingestelde man gebruikt 22/7 (naar Archimedes),
een landmeter gebruikt $\sqrt{10}$ (naar Brahmagupta)
en een sterrenkundige gebruikt 62832/20000 (naar Aryabatha).

Over de auteur

Desiree van den Bogaart is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool van Amsterdam. Zij verzorgt onderwijs over geschiedenis van de wiskunde in de bachelor- en masteropleiding en in de vorm van workshops en lezingen.
E-mailadres: *d.a.van.den.bogaart@hva.nl*

Noten

[1] Berlinghoff, W. & Gouvêa, F. (2016). *Wortels van de wiskunde.* Epsilon uitgaven: Amsterdam, p. 89.

[2] Als we refereren aan de straal, dan is het 4 × 64/81 = 256/81 dus iets meer dan *drie (ongeveer 3,16) keer straal kwadraat.*

[3] Daems, J. (2017). Archimedes en de cirkel. *Pythagoras (56)*, p. 11

[4] Roest, A. van der & Kindt, M. (2012). *Babylonische wiskunde – Een verkenning aan de hand van kleitabletten.* Epsilon uitgaven: Amsterdam, p. 33

[5] Zie Katz, V. (ed). (2007). *The mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam.* Princeton University Press: Princeton, p. 97-99.

[6] Lees meer hierover in Boon, B. (2018). De cirkelmeting van Archimedes. *Pythagoras (57)*, p.18.

[7] Uit: Blatner, D. (1997). *The joy of pi.* Penguin Books: Londen.

MEDEDELING

FORUM DIGITALE VMBO BB & KB EXAMENS

CVTE

Wist u dat:

- 97% van de wiskundeleerlingen het vmbo-bb examen digitaal gemaakt heeft?
- 91% van de wiskundeleerlingen het vmbo-kb examen digitaal gemaakt heeft?
- het digitale wiskunde-examen vooral uit open vragen bestaat?
- er sinds 2018 tijdens de examenperiode een forum is voor de digitale examens wiskunde kb?
- er in 2019 er ook een forum komt voor wiskunde bb?

Discussie-bbf, hoe zit het ook al weer?

De examenperiode voor de digitale en flexibele examens bb en kb duurt van begin april tot eind juni. In die periode moeten de opgaven en antwoorden geheim blijven. Dat maakt intercollegiaal overleg tussen examinatoren erg lastig, zeker als examinatoren geen directe collega's hebben om mee te overleggen. Daarom is het College voor Toetsen en Examens (CvTE) in 2018 gestart met een pilot voor een besloten en beveiligd forum (discussie-bbf) voor onder andere wiskunde kb digitaal. Op dit forum kunnen examinatoren – net als bij papieren examens – met elkaar van gedachten wisselen over de opgaven, correctievoorschriften en leerlingantwoorden. Zodra een examinator een vraag of opmerking op het forum plaatst, voorziet de moderator de discussie van de betreffende opgave en het correctievoorschrift.

De cijfers van 2018

Afgelopen jaar hebben 140 examinatoren gebruik gemaakt van het discussie-bbf. Er is discussie gevoerd over dertien opgaven, waarbij de langste discussie veertien reacties betrof. Net als op het forum voor GL/TL van de NVvW was de sfeer positief en constructief. Uit de enquête die het CvTE gehouden heeft onder de examinatoren, bleken met name examinatoren die in de praktijk minder makkelijk met een collega konden overleggen, het forum een uitkomst te vinden. De pilot is goed verlopen en wordt uitgebreid naar meer vakken.

2019: Deelnemen aan het forum?

Alle examinatoren met een wiskunde-examenklas vmbo-bb en vmbo-kb kunnen toegang krijgen tot dit forum. Hiervoor moet de examensecretaris u als examinator registreren bij *Examenblad.nl* én de afnamedatum(s) van de afnamegroep toevoegen. Een dag na de eerste afname ontvangt u dan een uitnodigingsmail voor het discussie-bbf.

Zijn de examens reeds begonnen of al afgenomen en heeft u nog geen toegang tot het discussie-bbf? Uw examen-secretaris kan u dan alsnog registreren als examinator, als dit nog niet is gebeurd, en uw afnamedatum(s) toevoegen. U krijgt dan alsnog een uitnodiging voor het forum.

Tip: Als u bij Examenblad geregistreerd staat als examinator wiskunde bb en/of kb wordt u automatisch op de hoogte gehouden via de mailings van *Examenblad.nl*. Voor meer informatie kunt u terecht bij uw examensecretaris. Deze is hier vanaf half maart over geïnformeerd.

Marjolein Nieuwenhuizen
Coördinator discussie-bbf
College voor Toetsen en Examens

METALEN GEMIDDELDEN

Luuk Koens

Het gulden getal φ (= 1,618...) ken je vast wel. Een 3D variant is het plastische getal ψ (= 1,325...). Maar er is meer. Luuk Koens neemt ons mee naar de wondere wereld van de familieleden van de twee morfische getallen.

Inleiding

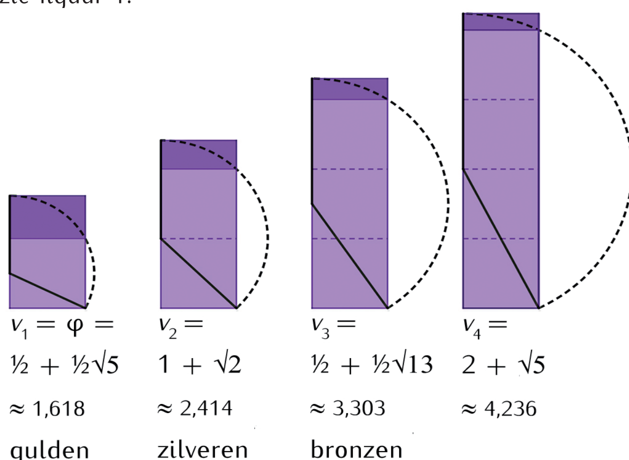
Er zijn mooie, heel mooie getallen. Een van mijn favorieten is een getal dat, vermenigvuldigd met zichzelf, gelijk is aan het getal plus een. Daarvan is er maar eentje positief: het gulden getal φ, stamvader van een grote familie van metalen gemiddelden.

Metalen gemiddelde in het platte vlak

Een rechthoek die, aan een lange zijde uitgebreid met een vierkant, gelijkvormig is aan zichzelf, heet een gulden rechthoek. Uit de gelijkvormigheid volgt het vormgetal φ. Wordt een rechthoek uitgebreid met p vierkanten zodat deze gelijkvormig is aan de oorspronkelijke rechthoek, dan is het vormgetal v_p, via $(px + 1) : x = x : 1$ en dus de vergelijking $x^2 = px + 1$:

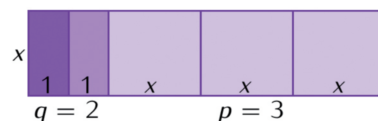
$$v_p = \frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2}$$

Dit vormgetal ligt tussen p en $p + 1$ en heet een *metalen gemiddelde*. Het is met passer en liniaal te construeren, zie figuur 1.



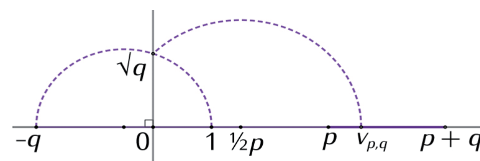
figuur 1

Het begrip metalen gemiddelde kan worden uitgebreid tot de positieve oplossing van een vergelijking van het type $x^2 = px + q$[1]. Dit is in een plaatje te vatten, zie figuur 2. De donkere rechthoek met vormgetal x wordt eerst op een lange zijde $q - 1$ keer gedupliceerd en daarna met p vierkanten aangevuld. Deze rechthoek is gelijkvormig aan de oorspronkelijke indien x voldoet aan de vergelijking $x^2 = px + q$.



figuur 2

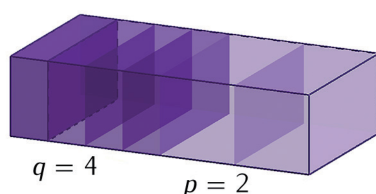
De oplossing van de vergelijking, het getal $v_{p,q} = \frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$ ligt tussen p en $p + q$ en je kunt dit in een orthogonaal assenstelsel construeren, zie figuur 3.



figuur 3

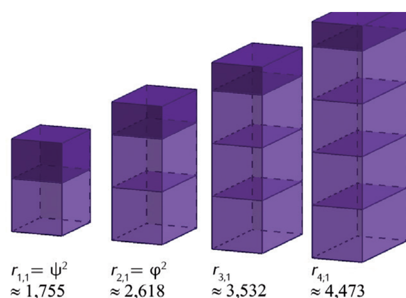
Metalen gemiddelde in de ruimte

De vorm van een rechthoekig blok is bepaald door de twee vormgetallen van de kleinste en middelgrote rechthoekige zijvlakken. Bij gelijke vormgetallen a zijn de afmetingen van het blok in de verhouding $a^2 : a : 1$. Het blok is aan één groot zijvlak uit te breiden met een blok in de verhouding $a^2 : a : (pa + q - 1)$ tot een blok in de verhouding $a^2 : a : (pa + q)$. Het resultaat is gelijkvormig aan het oorspronkelijke blok als $a^3 = pa + q$. Figuur 4 laat de uitbreiding van het meest linkerblokje zien voor $p = 2$, $q = 4$. Als het gehele blok gelijkvormig is aan het meest linkerblokje, dan is de verhouding 4 : 2 : 1, immers 2 is de oplossing van $x^3 = 2x + 4$.



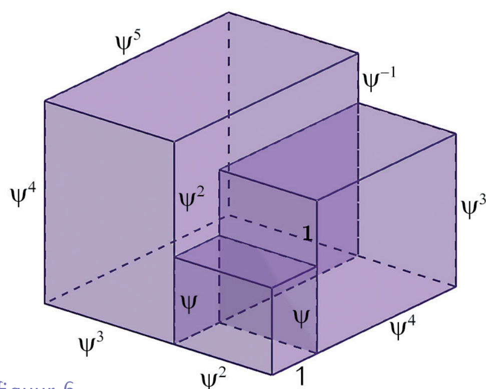
figuur 4

Voor $p = q = 1$ levert de vergelijking het plastische getal $\psi = 1{,}3247\ldots$, er geldt dus $\psi^3 = \psi + 1$. Het plastische getal is zo genoemd door Dom Hans van der Laan, benedictijner monnik en architect van de Bossche school. Voor $p = 2$, $q = 1$ komt het gulden getal φ weer tevoorschijn, immers $\varphi^3 = 2\varphi + 1$ volgt uit $\varphi^2 = \varphi + 1$.
Het ruimtelijk metalen gemiddelde $r_{p,q}$ kan nu worden gedefinieerd als het kwadraat van de oplossing van de vergelijking $x^3 = px + q$. Dit kwadraat is het vormgetal van een zijvlak met de langste en kortste ribbe, de 'bovenste verhouding'[2] van het rechthoekige blok met afmetingen in de verhouding $r_{p,q} : \sqrt{r_{p,q}} : 1$
Ook dit ruimtelijk metalen gemiddelde is een getal tussen p en $p + q$. Figuur 5 toont enkele voorbeelden, beginnend met een plastisch blok (ribben in verhouding $\psi^2 : \psi : 1$) en een gulden blok ($\varphi^2 : \varphi : 1$). Het bovenste donkere blok is steeds gelijkvormig aan het gehele blok.



figuur 5

Vanwege de fraaie meetkundige figuren waarmee het gulden en het plastische getal in verband worden gebracht, heten deze *morfische getallen*[3]. Zo is een vierkant te verdelen in drie gelijkvormige rechthoeken met vormgetal ψ^2 [4] en zijn hierop drie plastische blokken te plaatsen, zie figuur 6. Merk op dat uit $\psi^3 = \psi + 1$ volgt $\psi^5 = \psi^4 + 1 = \psi^3 + \psi^2$.

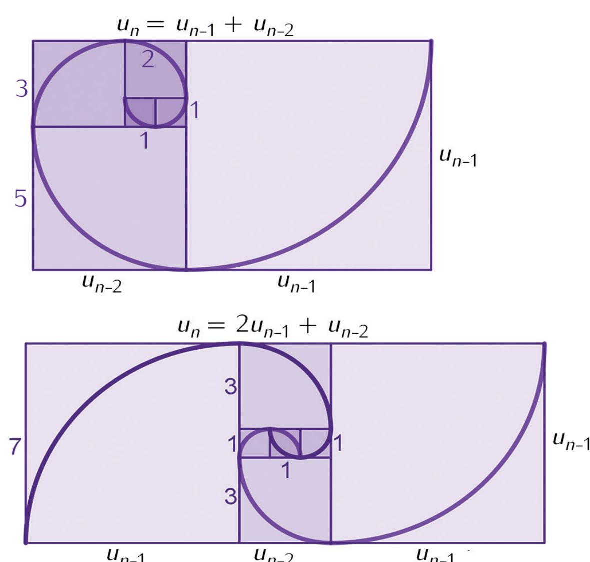


figuur 6

Het metalen gemiddelde kan nog verder worden uitgebreid tot meerdimensionale euclidische ruimten. Een hyperblok in de $(k + 1)$-dimensionale ruimte, met ribben voor zekere a in de verhouding $a^k : \ldots : a : 1$ wordt dan uitgebreid met een hyperblok $a^k : \ldots : a : (pa + q - 1)$ tot een hyperblok $a^k : \ldots : a : (pa + q)$.
Gelijkvormigheid ontstaat als $pa + q = a^{k+1}$, dus als a een positieve oplossing is van $x^{k+1} = px + q$.
Uit het tekenverloop blijkt dat de functie $f(x) = x^{k+1} - px - q$ met p, q en k positieve constanten, één positief nulpunt a heeft dat tussen $p^{1/k}$ en $(p + q)^{1/k}$ ligt indien $p + q > 1$. In dat geval kan a^k voor natuurlijke k het $(k + 1)$-dimensionale metalen gemiddelde van p en $p + q$ worden genoemd.

Rijen naar metalen gemiddelden

Rijen met een recurrente betrekking van de vorm $u_n = p u_{n-k} + q u_{n-k-1}$ hebben de karakteristieke polynoom $x^{k+1} - px - q$; de limiet van de quotiëntrij u_n/u_{n-1} is een nulwaarde van deze polynoom.
Voor $k = 1$ en $k = 2$ zijn deze rijen met startgetallen 1 te visualiseren door uit te gaan van een vierkant ($k = 1$) of kubus ($k = 2$) en dan herhaald uit te breiden volgens het recept als hiervoor beschreven voor gelijkvormige uitbreidingen.
De rij van Fibonacci, met $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, resulteert dan in de bekende Fibonaccirechthoeken met een Fibonaccispiraal van cirkelbogen. De rechthoeken convergeren naar de gulden rechthoek, immers, φ is de positieve nulwaarde van de karakteristieke polynoom. Bij de rij $u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2}$ hoort een plaatje met een dubbele spiraal en de rechthoeken convergeren naar een zilveren rechthoek, zie figuur 7.



figuur 7

De rechthoekige blokken in figuur 8 laten de rij met recurrente betrekking $u_n = u_{n-2} + u_{n-3}$ zien. De blokken, beginnend met een kubus die wordt uitgebreid met één kubus, convergeren naar een plastisch blok ($\psi^2 : \psi : 1$). Een spiraal van diagonalen van vierkante zijvlakken ligt in een vlak, dit is met inductie aan te tonen.

figuur 8

figuur 9

Figuur 9 laat de spiraal nogmaals zien, opgebouwd uit gelijkzijdige driehoeken, een visualisatie van de rij van Padovan[5]. De vijfhoek convergeert naar een plastische vijfhoek, met een hoek van 60° en vier van 120° en zijden in de verhouding $\psi^4 : \psi^3 : \psi^2 : \psi : 1$.

figuur 10

In figuur 10 convergeren de rechthoekige blokken door de recurrente betrekking $u_n = 2u_{n-2} + u_{n-3}$ naar een gulden blok ($\varphi^2 : \varphi : 1$). In de blokken zijn twee spiralen van diagonalen te zien; deze spiralen liggen in twee evenwijdige vlakken. Daarmee zijn we terug bij φ, de stamvader van de metalen gemiddelden.
Uit $\varphi^2 = \varphi + 1$ volgt via inductie $\varphi^n = F_n\varphi + F_{n-1}$ ofwel $\varphi^{n+1} = F_{n+1}\varphi + F_n$ waarin F_n het n-de getal uit de rij van Fibonacci is (met $F_1 = F_2 = 1$). En zo is φ^n het $(n + 1)$-dimensionale metalen gemiddelde van F_{n+1} en F_{n+2}.

Noten

[1] In het artikel 'The Family of Metallic Means' wordt de familie van 'vlakke' metalen gemiddelden beschreven door Vera de Spinadel.

[2] In 'A New Generalization of the Golden Ratio' veralgemeniseert Vedran Krčadinac de verhouding $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$ van de gulden snede tot $\left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a+b}{a}$. Dit geeft de vergelijking $x^{k+1} = x + 1$ waarmee de *k-th lower golden ratio* $\frac{a}{b}$ wordt berekend. Tot de macht k levert dit de *k-th upper golden ratio* wat hier het $(k + 1)$-dimensionale metalen gemiddelde van 1 en 2 is genoemd.

[3] In een artikel over 'Morphic Numbers' toont Jan Aarts c.s. aan dat φ en ψ de enige getallen groter dan 1 zijn die zowel oplossing zijn van een vergelijking $x^n = x + 1$ als $x^m = x^{m-1} + 1$ voor zekere natuurlijke getallen m en n. Dit levert φ voor $m = n = 2$, de vergelijkingen zijn dan identiek; en ψ voor $m = 5$, $n = 3$.

[4] Een uitvoerige verhandeling over het plastische getal in de vlakke meetkunde is gegeven in het artikel 'Towards van der Laan's Plastic Number in the Plane' van Vera de Spinadel en Antonia Redondo Buitrago.

[5] De architect Richard Padovan was leerling van Dom Hans van der Laan.

Over de auteur

Luuk Koens was leraar wiskunde aan het A. Roland Holst College te Hilversum. Hij is nu met pensioen.
E-mail: *luukkoens@gmail.com*

BOEKBESPREKING

PRIEMWOESTIJNEN



Gerardo Soto y Koelemeijer



Titel: Priemwoestijnen
Auteur: Alex van den Brandhof
Uitgever: Prometheus (2018)
ISBN: 978-90-4463-683-3, 256 pagina's, paperback
Prijs: € 21,99

In 2005 verscheen er bij Epsilon Uitgaven een boek getiteld *Geschiedenis van de wiskunde in de twintigste eeuw*, geschreven door de Italiaanse wiskundige Piergiorgio Odifreddi. In dit boek wordt getracht de ontwikkeling weer te geven van de wiskunde in de vorige eeuw, een poging die haast gedoemd is om te mislukken vanwege de vele gebieden in de wiskunde en de talloze successen in de toegepaste en zuivere wiskunde. Het boek bevat per hoofdstuk kleine paragrafen over deelgebieden van de wiskunde en geeft inderdaad een aardig overzicht van wat er vorige eeuw is bereikt. Toch is het lastig vat te krijgen op welk probleem nu precies is bewezen of welk succes is behaald, en waarom dit zo bijzonder is. De vraag is ook voor wie dit boek geschreven is, want voor het grote publiek is het nauwelijks leesbaar. Voor wiskundigen schiet het tekort omdat de achtergrondinformatie ontbreekt om het probleem echt te kunnen begrijpen.

'UIT HELE SIMPELE VRAGEN KAN HELE MOOIE WISKUNDE ONTSTAAN.'

Leesbaar en levendig

In tegenstelling tot de moedige poging van Odifreddi, is Alex van den Brandhof (1976) er met *Priemwoestijnen. Hoogtepunten uit de wiskunde van de 21ste eeuw* wel in geslaagd een leesbaar boek te schrijven over successen in de wiskunde, zowel voor algemeen geïnteresseerden, als voor wiskundigen. Van den Brandhof beheerst de kunst om te kiezen welke informatie relevant is om het probleem uit te leggen, en niet onbelangrijk, om een inkijkje te geven in de oplossing van het probleem. Van den Brandhof maakt ook werk van het vertellen van de geschiedenis van het probleem en noemt de namen van de betrokkenen bij de oplossing, wat het boek levendig maakt. Met aardige anekdotes wordt de lezer bij de les gehouden, en soms weet hij een glimlach op het gezicht van de lezer te bewerkstelligen ('Von Neumann zag de toekomst van de weersvoorspelling zonnig tegemoet.')

Daarnaast weet hij ook wanneer hij moet stoppen met uitleggen. Dit blijkt onder andere uit het zeer leesbare hoofdstuk *Partitiegetallen* (2011) waar Van den Brandhof eindigt met: 'Deze trace-formule ... heeft een dermate hoge graad van abstractie, dat het mij het meest wijs lijkt om dit hoofdstuk hier af te sluiten.'

Naast zijn baan als wiskundedocent aan een middelbare school in Zwitserland schrijft Van den Brandhof ook stukken over wiskunde voor *NRC*. Sommige hoofdstukken uit *Priemwoestijnen* verschenen in verkorte vorm al in de krant, maar nu hij de ruimte heeft, gebruikt hij die goed. Het is bewonderenswaardig dat hij wiskundige top-tijdschriften doorspit. Daarnaast heeft hij zelf contact met wiskundigen die in zijn boek voorkomen. Dit, samen met de kunst een goed verhaal te vertellen, en het goed kunnen uitleggen van het probleem, inclusief achtergrond, betrokkenen en oplossing, maakt *Priemwoestijnen* een goed boek. Een doorbraak in de wiskunde forceren is niet eenvoudig, maar daarover schrijven voor een breed publiek ook niet. Om er dan iedere keer weer een goedlopend verhaal van te maken, verdient alle lof. Dat is wat mij betreft de kracht van het boek en van Van den Brandhof: de vertaling van de echte wetenschap die op dat niveau vaak heel abstract is, naar een goed leesbaar verhaal zodat je als lezer toch een glimp meekrijgt van de wereld van de wiskunde.

Bron voor verhalen

Docenten wiskunde zouden met dit boek hun voordeel kunnen doen; het is een mooie bron voor verhalen in de les. Er kunnen opdrachten aan worden gekoppeld of de leerstof kan worden verreikt met delen uit het boek. Om een voorbeeld te noemen: het hoofdstuk *Partitiegetallen* (2011) gaat deels over rijen en kan goed worden ingezet in de vijfde klas wiskunde A. Er wordt in het boek onder

meer duidelijk gemaakt dat in de wiskunde vaak wordt samengewerkt, dat het soms heel lang duurt voordat er een doorbraak wordt gerealiseerd, en dat er ook fouten worden gemaakt in de bewijsvoering. Tevens wordt duidelijk dat om een goede wiskundige te worden discipline, doorzettingsvermogen en precisie is vereist. Leerlingen zouden door dit boek een ander beeld kunnen krijgen van wat wiskunde is, en er zit genoeg materiaal in om mee te puzzelen, of om een profielwerkstuk over te schrijven. *Priemwoestijnen* maakt duidelijk dat wiskunde niet saai is, maar vol in ontwikkeling is en dat uit hele simpele vragen hele mooie wiskunde kan ontstaan.

Wiskundige doorbraken

Het boek bestaat uit zeventien hoofdstukken.
Elk hoofdstuk behandelt een wiskundige doorbraak.
Doorbraak i is gedaan in het jaar $2000 + i$, $1 \leq i \leq 17$
Uiteraard worden er elk jaar meerdere doorbraken gerealiseerd, maar Van den Brandhof heeft een neus voor doorbraken die een mooi verhaal opleveren, of het meest tot de verbeelding spreken.
Om een beeld te schetsen van de inhoud van *Priemwoestijnen* zal ik enkele hoogtepunten schetsen. In 'De Lorenz-aantrekker (2001)' beschrijft Van den Brandhof de wiskunde die nodig is om het weer te voorspellen en de ontwikkeling daarvan. Hij verhaalt over de Amerikaanse wiskundige en meteoroloog Edward Lorenz, die een wiskundig model beschreef van de beweging van opstijgende lucht in de aardatmosfeer. Lorenz raakte steeds meer geobsedeerd door zijn model en hoewel steeds verder verwijderd van de werkelijkheid, hoopte hij nuttige inzichten te verkrijgen in het chaotische gedrag van dynamische systemen. Wat het werk van Lorenz te maken heeft met het baanbrekende werk van de toen jonge wiskundige Warwick Tucker kun je lezen in dit hoofdstuk.
Voor veel wiskundigen is het verhaal van de Russische Grigori Perelman niet onbekend. De wereldvreemde, maar briljante wiskundige, over wie het zeer lezenswaardige boek *Perfect rigour: A genius and the mathematical breakthrough of the century* verscheen, loste het Poincaré-vermoeden in 2003 op. Het prijzengeld van een miljoen dollar dat was uitgeloofd voor de oplossing, sloeg hij af, om zich vervolgens terug te trekken uit de wiskundige gemeenschap. Van den Brandhof slaagt erin om in het hoofdstuk 'Poincaré-vermoeden (2003)' een nieuwe twist aan het verhaal te geven én en passant uit te leggen wat topologie is.

Spijkers en elastiek

Een voorbeeld van een simpele vraag die elegante wiskunde oplevert kunnen we lezen in het hoofdstuk getiteld 'Happy-end (2005)'. In dit hoofdstuk, dat zijn naam dankt aan een huwelijk tussen twee hoofdrolspelers, maar dat ook zou kunnen verwijzen naar een bijna gelijktijdig tijdstip van overlijden, wordt verteld hoe je convexe veelhoeken kunt maken met spijkertjes en twee stukken elastiek. Het verhaal begint met convexe vierhoeken. Als je vijf spijkertjes in een plank slaat, waarvan er niet drie op een lijn liggen, en je spant er een elastiekje omheen, dan kun je altijd met een ander elastiekje een convexe vierhoek krijgen die daar binnen ligt, of op de rand. Vanzelfsprekend begon men zich af te vragen hoeveel spijkers (punten) er nodig zijn om een convexe vijfhoek te garanderen, en nog interessanter, hoeveel voor een convexe n-hoek. Het leuke van dit soort problemen is dat je, zeker na de uitleg van Van den Brandhof, meteen zelf aan de slag kunt met tekenen. In 2005 bewees Szekeres, op zijn 94ste, dat er zeventien spijkertjes nodig zijn om een convexe zeshoek te garanderen.

Priemtweelingen

Uiteraard kunnen priemgetallen in een boek met hoogtepunten niet ontbreken. Priemgetallen komen op meerdere plekken voor in het boek. Een zeer elegant probleem is dat van de priemtweelingen. Een priemtweeling is een paar priemgetallen dat onderling 2 verschilt, zoals 3 en 5 of 17 en 19. De vraag is hoeveel van dit soort priemtweelingen er zijn. Zijn er oneindig veel of niet? Priemneven hebben een afstand 4, zoals 7 en 11, en sexy priem-getallen hebben een afstand 6, zoals 5 en 11.
Zijn er nu ook oneindig veel priemneven, of oneindig veel sexy priemgetallen? We weten het helaas nog niet. Van den Brandhof schrijft in het hoofdstuk 'Priemtweelingen (2013)' over het resultaat van een in vergetelheid geraakte Chinese wiskundige Zhang die in 2013 met een opmerkelijk resultaat kwam. Hij bewees dat er oneindig veel priemparen zijn met afstand kleiner dan 70 miljoen. Dat kunnen priemtweelingen zijn, priemneven, sexy priemgetallen, maar dat kon Zhang nog niet bewijzen. Hij kon enkel laten zien dat er een getal bestaat, kleiner dan 70 miljoen, zeg n, zodat er oneindig veel paren zijn p en $p + n$, waarbij p en $p + n$ beide priemgetallen zijn.
Door het werk van Zhang zijn andere wiskundigen erin geslaagd die grens vrij snel naar beneden te krijgen, maar het is nog steeds een open vraag of er oneindig veel priemtweelingen bestaan.
De titel van het boek verwijst naar het hoofdstuk 'Priemwoestijnen (2014)'. Wie wil weten wat een priemwoestijn is, zal het boek zelf moeten aanschaffen. Het is zeer de moeite waard. Ik kijk nu al uit naar het jaar 2027, want ik vermoed dat de titel een geheime boodschap in zich draagt. In 2018 begint een nieuwe priemwoestijn, die loopt tot en met 2026. Het jaar erop volgend komt er vast een nieuw boek met nieuwe hoogtepunten uit de priemwoestijn 2018-2026.

Over de auteur

Gerardo Soto y Koelemeijer is postdoc aan het ICLON Leiden, docent wiskunde aan het Stedelijk Gymnasium Leiden, en auteur van o.a. *Wie is er bang voor wiskunde?* (2018) en *Wiskundigen mogen niet huilen* (2015).

50 JAAR C¿TO, EEN HALVE EEUW WISKUNDE-EXAMENS?

Ivo Claus
Irene van Stiphout

DEEL 5

In september 2018 bestond Cito 50 jaar. In het vijfde artikel over de rol die Cito door de jaren heen heeft gespeeld bij de wiskunde-examens schrijven Ivo Claus en Irene van Stiphout over de normering. Zij interviewen wetenschappelijk onderzoekers Hendrik Straat en Marieke van Onna van de psychometrische afdeling van het Cito



Inleiding

Cito beschikt over een van de grootste psychometrische onderzoeksafdelingen van Europa. Deze specialisten voeren onder andere berekeningen uit voor de normering van de centrale examens. Op basis van hun technische advies en het advies van de inhoudelijk betrokken toetsdeskundigen stelt het College voor Toetsen en Examens de N-term vast.
Voor dit artikel zijn we in gesprek gegaan met twee wetenschappelijk onderzoekers van deze afdeling, Marieke van Onna en Hendrik Straat. Beiden zijn betrokken bij de normering van de centrale examens. Ieder jaar doen ongeveer 200.000 leerlingen centraal examen. Deze leerlingen verdienen een eerlijke beoordeling en een diploma met een vaste waarde. Maar eerlijk normeren is ingewikkeld. Tegen welke keuzes of dilemma's lopen Hendrik en Marieke aan?

Equivaleren

Als eerste punt noemen Hendrik en Marieke *equivaleren*. Daarbij draait het erom dat cijfers van verschillende examens van hetzelfde vak gelijkwaardig zijn. De meest nauwkeurige manier vanuit een psychometrisch oogpunt om dit te doen, is niet altijd de meest praktische.
De aanpak van de normering hangt onder andere af van het vak, het aantal deelnemers en het type toets, aldus Hendrik en Marieke. Hendrik: 'Het uitgangspunt is dat leerlingen *gelijkwaardige* prestaties moeten aantonen. Dit betekent dat het voor een leerling in 2019 evenveel vaardigheid vraagt om een voldoende te halen als van een leerling die in datzelfde vak in 2018 examen heeft gedaan. Het gelijk waarderen van gelijke prestaties heet ook wel equivaleren en betekent dat de moeilijkheid van toetsen wordt vergeleken om zo te berekenen welke score op de ene toets overeenkomt met een bepaalde score op de andere toets.'



Hendrik Straat en Marieke van Onna

Marieke: 'Er zijn verschillende manieren om te equivaleren. De meest nauwkeurige manier om dit te doen is via *anchor in package*. Deze manier wordt in het voortgezet onderwijs alleen gebruikt bij digitale toetsen. Leerlingen maken nieuwe opgaven en zogeheten *ankeropgaven*, die eerder bij andere leerlingen in eerdere examens zijn afgenomen. Via de resultaten op deze ankeropgaven kan een inschatting worden gemaakt van de relatieve moeilijkheid van examens, en daarmee van het gemiddelde niveauverschil van leerlingen in twee verschillende examenjaren. Deze manier is nauwkeurig omdat er veel gegevens onder liggen. De ankeropgaven zijn door veel andere leerlingen in bijna dezelfde omstandigheden gemaakt. Dat maakt dat de moeilijkheid van opgaven en de vaardigheid van leerlingen nauwkeurig geschat kunnen worden.' Twee andere manieren van equivaleren zijn *pretest* en *posttest*. Hierbij worden enkele opgaven van een toekomstig examen (pretest) of net afgenomen examen (posttest) afgenomen in combinatie met ankeropgaven in een afzonderlijk onderzoek. Dit is minder nauwkeurig dan anchor in package omdat de afnamecondities vaak

anders zijn. Opgaven worden bijvoorbeeld afgenomen tijdens een schoolexamen. Dat is anders dan een centraal examen. Een ander verschil is dat de groepen leerlingen van wie gegevens zijn verzameld, kleiner zijn. Door deze verschillen is er een groter betrouwbaarheidsinterval voor de geschatte moeilijkheid van het examen. Een laatste manier is via standaardsetting. Hierbij maken groepen experts een inschatting van de moeilijkheid van opgaven van twee verschillende examens.'

Hendrik: 'Anchor in package is de meest precieze manier om de norm te handhaven. Ieder jaar berekenen we hoe nauwkeurig onze schattingen zijn. We zien dat de schattingen bij anchor in package preciezer zijn dan die van pre- en posttest.' De kernvakken worden zo nauwkeurig mogelijk geëquivaleerd. Hendrik wijst erop dat de aard van het vak bepaalt wat voor analyse er gedaan wordt. 'Voor sommige vakken zijn er heel weinig leerlingen waardoor we weinig data hebben. Denk bijvoorbeeld aan Russisch, Fries en Arabisch. De kernvakken Nederlands, Engels en wiskunde willen we zo nauwkeurig mogelijk equivaleren, omdat deze vakken een groter gewicht hebben bij de beslissing over het wel of niet verkrijgen van het diploma. Deze examens zijn op havo/vwo op papier, dus anchor in package kan niet. Dus willen we voor deze vakken een pretest of posttest. Voor leerlingen hangt hier immers veel van af.'

Vanuit een psychometrisch perspectief zou het ideaal zijn als anchor in package bij alle vakken gebruikt zou kunnen worden. Dat zou de meest nauwkeurige normhandhaving zijn. Marieke en Hendrik beseffen dat dit praktisch niet haalbaar is. 'De inhoud bepaalt hoe de examens eruitzien, niet de psychometrie.'

'DE INHOUD BEPAALT HOE DE EXAMENS ERUITZIEN, NIET DE PSYCHOMETRIE.'

Balans

Dit brengt ons op de balans tussen inhoud en psychometrie. Niet alle vragen die inhoudelijk interessant zijn, zijn psychometrisch gezien geschikt. En andersom geldt dat vragen die heel onderscheidend zijn, inhoudelijk wellicht niet interessant zijn. Hoe kijken Marieke en Hendrik hier tegenaan?

Hendrik: 'Voor alle examens is de syllabus leidend. Niet alles wat in de syllabi staat, kan in één toets worden getoetst, dan zouden examens veel te lang worden.

De keuze van de onderwerpen wordt gemaakt op basis van de inhoud. Als alleen gestreefd zou worden naar de hoogste betrouwbaarheid, zouden de examens er vreemd uitzien en zou er veel verloren gaan. Het gaat er juist om dat leerlingen breed worden opgeleid en veel verschillende onderwerpen aandacht krijgen. Zou de psychometrie voorop staan, dan zou je een eenzijdig examen krijgen. Het gaat om het vinden van een juiste balans tussen inhoud en meetkwaliteit. De toetsdeskundigen en CvTE waken over deze balans.' Marieke: 'Een makkelijke instapvraag is puur psychometrisch gezien niet interessant. Zo'n vraag draagt immers niet bij aan het maken van het onderscheid tussen vaardige en minder vaardige leerlingen. Maar voor leerlingen is zo'n opgave juist wel belangrijk om in een context te kunnen komen en op zijn of haar gemak te raken.'

Psychometrie kan helpen om grip te krijgen op de kwaliteit van vragen, benadrukken Marieke en Hendrik. Bij vragen met veel punten, zoals vragen met veel rekenstappen of onderzoeksvragen, heb je voldoende observaties nodig van alle scorepunten om de moeilijkheid van het behalen van ieder extra scorepunt goed te kunnen schatten. In de praktijk blijkt dat leerlingen op bijvoorbeeld een 8-puntsvraag veel scores in het midden hebben, en dat de scores 0, 1, 2 en 6, 7 en 8 nauwelijks voorkomen. Dat betekent dat het onderscheid tussen de moeilijkheid van 0, 1 of 2 aan de ene kant, of tussen 6, 7 of 8 scorepunten aan de andere kant, niet duidelijk is. En er ontstaat een schijnnauwkeurigheid door deze scorepunten wel allemaal toe te staan.

Psychometrie kan volgens Hendrik ook helpen om zicht te krijgen op afhankelijkheid tussen opgaven. Dit doet zich voor als een leerling die een eerste vraag bij een context niet weet en dit tot gevolg heeft dat hij of zij de rest ook niet kan maken. Hendrik: 'Dit soort problemen is op verschillende manieren te ondervangen. Een optie is om een tussenantwoord te geven. Dit kan door in de vraag bijvoorbeeld op te nemen om $x = 2{,}45$ te nemen als het eerste onderdeel niet gelukt is.' Bij opgaven waarin veel gerekend moet worden en een rekenfout in het begin ertoe kan leiden dat een leerling de vraag niet helemaal kan beantwoorden, zou volgens Hendrik gevraagd kunnen worden naar een beschrijving van de aanpak. 'Overigens blijkt uit Cito-onderzoek bij digitale vmbo-examens dat correctie op tussenstappen geen invloed heeft op het cijfer dat leerlingen voor het examen behalen. Vanuit psychometrisch oogpunt is er daarom geen noodzaak om tussenstappen te scoren, al kunnen er natuurlijk vakinhoudelijke redenen zijn om dit wel te doen.'

Eerlijkheid en transparantie

Wiskundig gezien is er veel mogelijk om zo nauwkeurig mogelijk te equivaleren. Maar dan is het bijna niet meer te volgen voor docenten hoe dit gaat. Hoe kun je zorgen voor een eerlijke normering die toch nog te volgen is?

Marieke: 'Een eenvoudige methode om te equivaleren bestaat niet. Elke methode, hoe simpel of hoe ingewikkeld ook, heeft voor- en nadelen. Het moet een transparant proces zijn.' Volgens Hendrik betekent dit dat helder moet

zijn wat de uitgangspunten zijn. Verschillen van mening zijn vaak terug te voeren naar verschillende uitgangspunten. Een voorbeeld hiervan is de aanname van gelijke populaties. Hendrik: 'De aanname is dat de populatie die op een vak examen doet als geheel en over de jaren heen niet zoveel verandert. Onderdeel van het normeringsproces is om te onderzoeken of in deze aanname gaten geschoten kunnen worden. Een voorbeeld van een reden dat een populatie kan veranderen is de invoering van de kernvakkenregeling. Zo'n verandering kan betekenen dat leerlingen eerder een minder moeilijk profiel kiezen om te voorkomen dat ze het niet halen. Het kan ook zijn dat leerlingen meer aandacht gaan besteden aan de kernvakken omdat deze zwaarder meetellen in de uitslagregeling en zodoende hoger op deze vakken scoren.'
Het wiskundige model dat wordt gebruikt voor de normering kan heel complex worden, maar dan is het voor een leek moeilijk te volgen. Marieke: 'Vanwege de transparantie willen we dat het model alleen maar ingewikkelder mag worden als het evident is dat die ingewikkeldheid iets oplevert. In dat geval is het uit te leggen. Het statistische model wordt zeker niet altijd beter door meer data te verzamelen of meer statistische toeters en bellen te gebruiken. Vaak win je het een, en verlies je het ander.' Hendrik: 'Welk model ook wordt gebruikt, het belang van de leerling staat altijd voorop. Dat betekent met name dat een eerlijke waardering van de prestatie van de leerlingen belangrijk is. Als daarvoor een ingewikkelder model nodig is, dan zullen we altijd ons best doen om een transparante, duidelijke uitleg te geven.'

'HET BELANG VAN DE LEERLING STAAT ALTIJD VOOROP. DAT BETEKENT DAT EEN EERLIJKE WAARDERING VAN DE PRESTATIE VAN DE LEERLINGEN BELANGRIJK IS.'

De rekenmodellen die worden gebruikt voor de normering worden voortdurend tegen het licht gehouden. Marieke: 'Aanpassingen zijn altijd gebaseerd op onderzoek. Stel dat we een ander psychometrisch model willen gaan hanteren, dan gaan we eerst kijken naar wat de gevolgen van een aanpassing zouden zijn voor leerlingen. Dan rekenen we bij oude data door wat dat voor leerlingen zou betekenen. Soms worden nieuwe paden verkend om bepaalde knelpunten in de normering op te lossen, ook als dit niet direct in de praktijk gebracht kan worden.'
Voor sommige vakken is het heel lastig om een 10 te halen. Hendrik: 'Bij deze vakken kun je ook nadenken over een andere methodiek. Nu is het alleen maar mogelijk om een 10 te halen als er nul fouten zijn. Een ander uitgangspunt zou kunnen zijn dat voor het behalen van een 10 een minimaal niveau nodig is. Dan zou een leerling met een paar foutjes toch een 10 kunnen halen. Dit vraagt wel om uitleg, want het kan al gauw een hoop gegoochel lijken.'

Tot slot

Tot slot hebben we Hendrik en Marieke gevraagd om tips voor docenten om hun eigen toets goed te normeren. Hendrik: 'Bij het bepalen van de cesuur, de grens tussen onvoldoende en voldoende, gaat het erom wat het meest aannemelijk is. Zijn klassen goed vergelijkbaar dan kun je koersen op een gelijk percentage voldoende. Heb je de toetsen zo gemaakt dat ze even moeilijk zouden moeten zijn dan kun je bij hetzelfde percentage correcte antwoorden de lat leggen. Een andere optie is een bepaald gemiddeld cijfer, bijvoorbeeld gemiddelde 6,0, of het resultaat van een andere jaarlijkse toets, als benchmark nemen.'
Daarbij ga je ervan uit dat het resultaat op de andere toets de algemene vaardigheid van jouw leerlingen weerspiegelt. Als je merkt dat een klas over het geheel beter wordt op de andere toets, dan kun je het gemiddelde cijfer op jouw toets ook wat hoger laten zijn. Marieke: 'Daarnaast zou je kunnen kijken of het mogelijk is om meer gegevens te verzamelen. Gegevens van één toets die door één klas is gemaakt, zeggen niet veel. Als er veel hoge scores zijn behaald, concludeer je dan dat de groep vaardig is of dat de toets te makkelijk was? Dat valt niet met zekerheid te zeggen. Dit is wel mogelijk als je meer gegevens verzamelt zoals historische gegevens over de moeilijkheid van de items of historische gegevens van de leerlingprestaties op eerdere toetsen.'
Volgens Marieke en Hendrik is het vooral van belang om te sturen op wat er past bij je verwachtingen. Als de leerlingen wat vaardiger zijn, en je komt met N = 1 op een 5,8 gemiddeld uit, dan kun je misschien N = 1,5 doen. Dan doe je de leerlingen meer recht. Dit natte vingerwerk is bij de centrale examens natuurlijk uit den boze.

Over de auteurs

Irene van Stiphout en Ivo Claus zijn toetsdeskundigen bij Cito.
Emailadressen:
Irene.vanStiphout@cito.nl en *Ivo.Claus@cito.nl.*

UITDAGENDE PROBLEMEN

Jacques Jansen

ALLEGORIE VAN DE GEOMETRIE

Kies in de wiskundeles eens een andere invalshoek: kijken naar en inzoomen op een schilderij. Leerlingen kunnen een symbolische voorstelling van de meetkunde ontraadselen en blootleggen.

Inleiding

Bijna elke week staat in het Volkskrantkatern *Sir Edmund* de rubriek Oog voor detail van Wieteke van Zeil. 15 september 2018 was haar onderwerp: geometrie.[1] Zij besprak het werk *Allegorie van de geometrie* van Laurent de la Hyre, zie figuur 1.

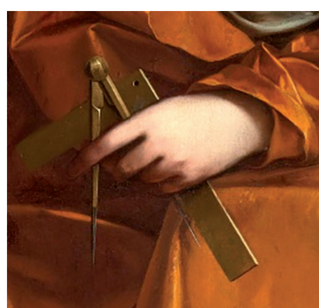


figuur 1 Allegorie van de geometrie - Laurent de la Hyre 1649

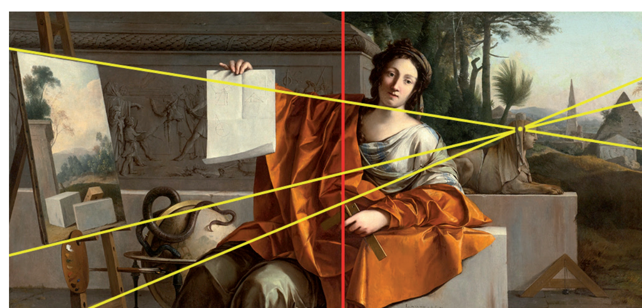
De la Hyre was een Franse barokschilder, 1606-1656, geboren in Parijs. Wiskunde, vooral geometrie, speelde een belangrijke rol in zijn leven. Hij was ook goed op de hoogte van de perspectiefleer. Hij studeerde samen met onder anderen Girard Desargues, een van de ontwerpers van de projectieve meetkunde. Het betreffende schilderij is te vinden in het Legion of Honor Museum in San Francisco. Wieteke bespreekt één detail, maar er zijn veel meer interessante details waarmee je wiskunde C-leerlingen kunt uitdagen.

Wat is er op het schilderij aan details te zien?

In het midden van de compositie zien we een jonge vrouw leunend op een marmeren blok met een geheimzinnig stuk papier in haar rechterhand. Daar zoomt Wieteke op in. De vraag is: wat staat er op dat papier? Maar eerst kijken we naar haar linkerhand. Is er een relatie met haar rechterhand?



figuur 2

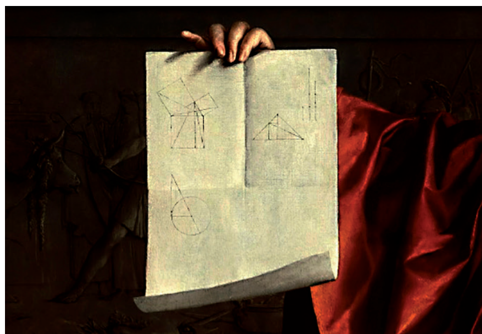


figuur 3

Zij houdt in haar linkerhand een passer en een winkelhaak (gnomon) vast. Abstract (het papier) versus concreet (de passer en winkelhaak)? Door het verticale been van de passer kunnen we een lijn trekken, zie figuur 3. Je kunt je afvragen of hier sprake is van de gulden snede? Iets om na te gaan...

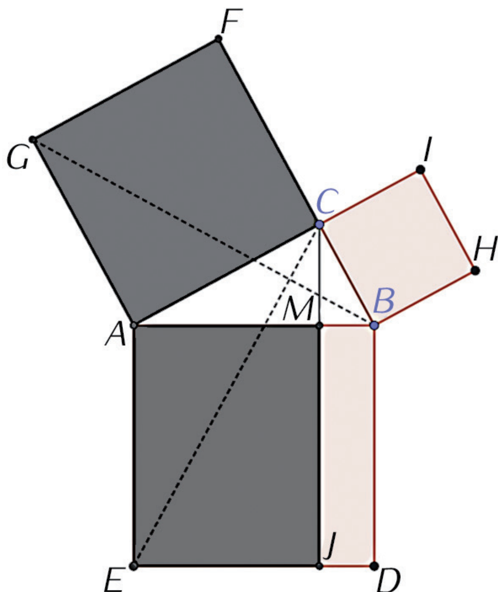
We verraden het maar. De schilder heeft een jonge vrouw uitgekozen als personificatie van de geometrie. Dat gebeurde vroeger wel vaker bij de vrije kunsten. Maar de schilder deed veel meer. Er is een sfinx te zien. Trek de evenwijdige lijnen, zoals dat gebeurt in figuur 3, dan blijkt het verdwijnpunt te liggen in de kop van de sfinx. Worden de geometriebevindingen van het oude Egypte (praktisch ingesteld) hiermee verbonden met dat van de oude Grieken?

Terug naar het geheimzinnige papier



figuur 4

Linksboven op het papier, zie figuur 4, staat een bewijsfiguur van de Stelling van Pythagoras. Dit is terug te vinden in het eerste boek van *De Elementen* van Euclides. In totaal zijn er dertien boeken. Eeuwenlang toch, de basis van de meetkunde. We noteren: *Elementen* (1, 47).



figuur 5

We bestuderen het bewijs. Er wordt gewerkt met vijf hulplijnen. Bruno Ernst[2] schrijft in zijn boek *De interessantste bewijzen voor de Stelling van Pythagoras*, dat er in dit geval sprake is van een mooi dynamisch bewijs. Loodlijn *CMJ* noemt hij de belangrijkste hulplijn. In figuur 5 hebben we twee hulplijnen weggelaten. Lijn *CMJ* verdeelt vierkant *ABDE* in twee rechthoeken. Rechthoek *AMJE* heeft dezelfde oppervlakte als vierkant *ACFG*. Maar dat gaan we eerst bewijzen. Merk op dat ΔEAC congruent is met ΔBAG volgens ZHZ. Ga maar na!
Dan kunnen we iets fraais doen, punt *C* schuiven we naar punt *M* op lijn *CMJ*. De oppervlakte van ΔEAC verandert niet. Immers basis *AE* en hoogte blijven hetzelfde. De onveranderde oppervlakte is de helft van de oppervlakte van ΔEAC. Punt *B* schuiven we over lijn *BCF* naar punt *C*. De oppervlakte van ΔBAG verandert niet. Immers basis *AG* en hoogte blijven hetzelfde. De onveranderde oppervlakte is de helft van de oppervlakte van vierkant *ACFG*. Dus kunnen we de conclusie trekken dat de oppervlakte van vierkant *ACFG* gelijk is aan de oppervlakte van rechthoek *AMJE*. Analoog gaat dat aan de rechterkant van lijn *CMJ*. Dat kunnen de leerlingen mooi zelf doen. En het bewijs kan afgerond worden: opp(vierkant *ABDE*) = opp(vierkant *ACFG*) + opp(vierkant *BCIH*).

Meer meer

'Maar er is meer', schrijft Wieteke. Naast deze stelling staan er nog drie uit *De Elementen* van Euclides.
We zoomen in op haar artikel.

> Rechts staan andere uitwerkingen van zijn zogenoemde postulaten; twee punten kunnen worden verbonden door een rechte lijn, de meetkunde van een cirkel en, denk ik, de vijfde waarin wordt beschreven dat als twee hoeken van een driehoek samen kleiner zijn dan een rechte hoek, de lijnen elkaar uiteindelijk moeten kruisen – maar helemaal zeker ben ik niet of het dit principe is dat is afgebeeld en daar was mijn gezelschap ook niet uit. Ik ben het perspectief van de wiskunde sinds school helaas een beetje verloren.

figuur 6 Fragment Oog voor detail, *Volkskrant* 15 september 2018

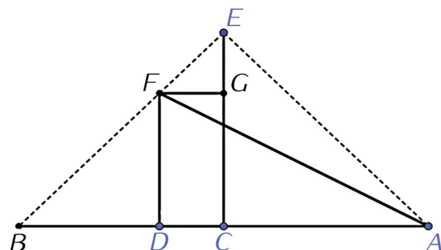
Zie de tekst in figuur 6, voer voor wiskunde C-leerlingen. Zij kunnen onderzoeken of Wieteke het juiste perspectief heeft. Een andere vraag is of we de uitwerkingen op dat papier kunnen terugvinden in het schilderij. Het gedeelte rechtsboven bestaat uit twee plaatjes die bij elkaar horen, zie figuur 7. Het gaat om *De Elementen* (2, 9).



figuur 7

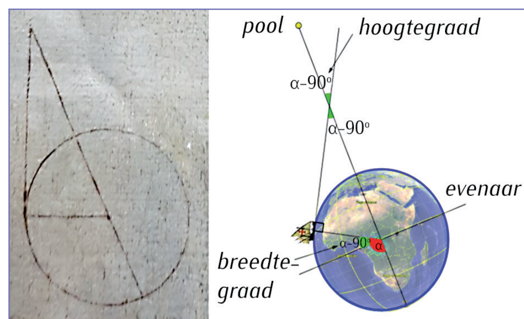
Uitgebeeld wordt Stelling 9: Als een lijnstuk in twee gelijke delen verdeeld is en ook in twee ongelijke delen, zijn de oppervlakten van de vierkanten op de ongelijke delen samen twee keer de oppervlakten van de vierkanten op het halve lijnstuk en op het middenstuk van het lijnstuk, zie figuur 8. Het gaat om lijnstuk *AB*, met punt *C* als midden en punt *D* is geheel willekeurig gekozen. In de figuur is punt *D* links van *C* gekozen. Er moet nu worden

bewezen dat $AD^2 + BD^2 = 2(AC^2 + DC^2)$. In de perioden van de oude Grieken zag men kwadraten als oppervlakten van vierkanten. Het probleem wordt tweedimensionaal in beeld gebracht. Tekenen dus!
Teken lijnstuk CE met lengte helft van lijnstuk AB en loodrecht op AB. Verbind punt E met de punten A en B. Teken door punt D een lijn evenwijdig met EC die BE snijdt in F. Teken een lijn door punt F evenwijdig met AB die EC snijdt in punt G. Teken AF.
Zie het resultaat in figuur 8.



figuur 8

Te bewijzen: $AD^2 + BD^2 = 2(AC^2 + DC^2)$. Bewijs: er zijn in de figuur veel hoeken aan te wijzen met een grootte van 45°. Daardoor ook veel hoeken van 90°. Ga maar na dat $\angle ABE = \angle BAE = \angle CEA = \angle GFE = \angle FEG = 45°$. Lijnstuk AF gaat als hypotenusa een belangrijke rol spelen in de rechthoekige (ga dat na) driehoeken $\angle ADF$ en $\angle AEF$.
$AF^2 = AD^2 + BD^2$ (immers $DF = BD$)
$AF^2 = FE^2 + AE^2$
$FE^2 + AE^2 = 2 \cdot DC^2 + 2 \cdot AC^2$
Dus $AD^2 + BD^2 = 2(AC^2 + DC^2)$
Met de (algebra)kennis van nu - variabelen invoeren, kwadrateren, haakjes verdrijven en korter schrijven – kun je het bewijs ook leveren. Maar dat laten we de C-leerlingen zeker niet doen. In figuur 7 staan ook nog drie verticale lijnstukjes in de verhouding 1 : 4 : 3. Het is echter onduidelijk wat de schilder hiermee bedoelde. Er zijn allerlei speculaties. Een ervan noem ik, en het bewijs laat ik aan jou over. Zie figuur 8: we kunnen ervoor zorgen dat AF door het midden gaat van EC. Dat punt noemen we H. Punt D is nu vastgelegd. Wat blijkt nu? $DF : CH : HG = 4 : 3 : 1$.

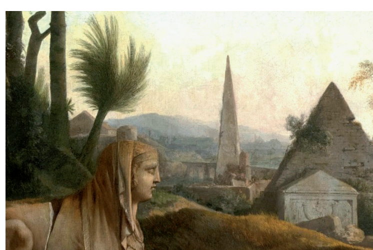


figuur 9

Dan komen we aan het laatste plaatje. Het zou verwijzen naar *De Elementen* (2, 32). De som van de drie binnenhoeken van een driehoek is gelijk aan de som van twee rechte hoeken. Maar ook – een zijde is verlengd – de buitenhoek is de som van de twee afgelegen binnenhoeken. Met deze laatste bewering kun je aantonen dat de hoekensom in een driehoek 180° is. Je moet dan wel even een hulplijntje trekken. Wordt dit schetsje ook in verband gebracht met plaatsbepaling op aarde, zie figuur 9? En is er ook een relatie met de globe waarbij we denken aan landmeting, navigatie en het maken van kaarten?

Architectuur

De toepassingen van de meetkunde, architectuur, vinden we terug in de achtergrond van het schilderij met een tweetal piramides, een gebouw dat op een tempel lijkt en boven de kop van de sfinx een rond gebouw.



figuur 10

Perspectief

In het schilderij zien we een schilderij op een ezel geplaatst waarbij Wieteke van Zeil opmerkt dat de blokken in het juiste perspectief zijn geplaatst. Een bewering die leerlingen uitnodigt om dat te controleren. Mijn collega Karen de Kort, met wie ik een Zebraboekje schrijf over architectuur, formuleerde het voor de leerlingen zo: 'zijn de getekende balken op het schilderij vanuit het standpunt van de schilder Laurent de la Hyre geschilderd, of vanuit het standpunt van het personage op het doek?'

Samengevat

Wat is de bedoeling van dit schilderij? Een ode, toch, aan de oude meetkunde en de leer van het perspectief. Hoe belangrijk de meetkunde is bij alles wat ontworpen is en wat we waarnemen. 'Alfa en bèta als verwanten', schrijft Wieteke. Dit kun je wiskunde C- leerlingen toch niet onthouden?

Noten

[1] Zeil, W. van (2018, 16 september). Oog voor detail. *de Volkskrant,* katern *Sir Edmund.*
[2] Ernst, B. (2002). *De interessantste bewijzen voor de Stelling van Pythagoras.* Utrecht: Epsilon Uitgaven.

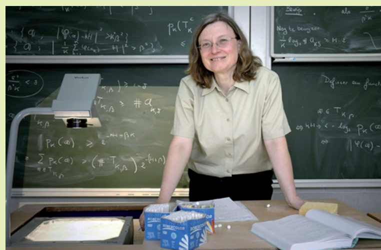
Over de auteur

Jacques Jansen was veertig jaar docent wiskunde.
Hij is sinds 1 augustus 2014 met pensioen.
E-mailadres: *jacques.jansen@wxs.nl.*

WIS EN WAARACHTIG

Deze rubriek is een impressie van zaken die van belang zijn voor docenten wiskunde. Wilt u een wetenswaardigheid geplaatst zien, uw collega's op de hoogte brengen van een belangwekkend nieuwsfeit dat u elders heeft gelezen of verslag doen van een wiskundige activiteit? Stuur ons uw tekst, eventueel met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor bijdragen in te korten of niet te plaatsen. Bijdragen naar *wisenwaarachtig@nvvw.nl*

Prestigieuze prijs voor Belgische wiskundige



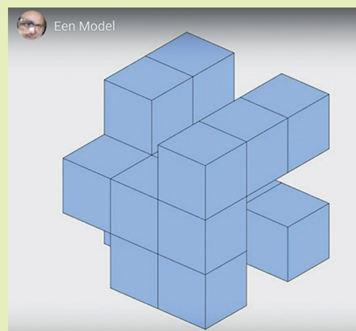
Ingrid Daubechies

Op 11 februari, de dag die door de UNESCO is uitgeroepen tot de internationale dag van vrouwen en meisjes in de wetenschap, werden de *Woman in Science Awards* toegekend. Met deze awards wil de UNESCO jaarlijks vrouwelijke wiskundigen belonen voor hun baanbrekende werk. Dit jaar viel deze eer te beurt aan de Belgische wiskundige Ingrid Daubechies voor haar baanbrekende werk in beeldcompressie. Zij is bekend van de 'Daubechies-wavelets', die van groot belang zijn in de beeldcompressie en die aan de basis liggen van heel wat dagelijkse toepassingen. Zonder het werk van Ingrid Daubechies zou het internet het waarschijnlijk zonder Netflix en Instagram moeten stellen.
Bron: *https://vvwl.mathelo.net/prestigieuze-prijs-voor-belgische-wiskundige/*

Twee unieke driehoeken

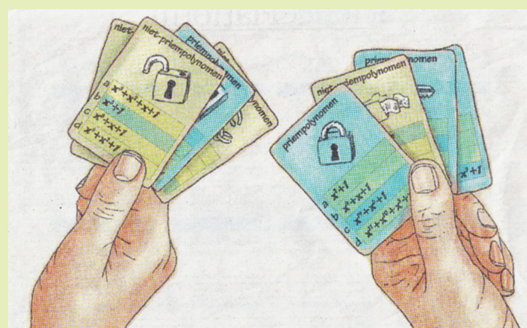
Zijn er paren driehoeken, een gelijkbenige en een rechthoekige, beide met een geheeltallige lengte die dezelfde omtrek én dezelfde oppervlakte hebben? Ja, in 2003 vond Denis Borris een voorbeeld: de rechthoekige driehoek met zijden 135, 352 en 377 en de gelijkbenige driehoek met zijden 132, 366 en 366 hebben beide omtrek 864 en oppervlakte 23760. Nu hebben twee jonge Japanse wiskundigen, Yoshinosuke Hirakwa (28) en Hideki Matsumura (26) bewezen dat dit paar driehoeken het enige paar is (op vergrotingen na). De diophantische vergelijking $y^2 = (x^3 - x + 6)^2 - 32$ heeft tien rationale oplossingen, waarvan er acht niet naar het driehoekenprobleem konden worden vertaald; deze gaven zijden met een negatieve lengte. De laatste twee oplossingen, $x = 5/6$ en $y = \pm 217/216$ correspondeerden exact met het paar driehoeken van Borris. Het bewijs van de twee Japanners is niet lang, wel modern en abstract.
Bron: *NRC 12 en 13 januari 2019*

Kubisme 2.0



Kunstenares Edith Cohen vroeg zich af hoeveel verschillende figuren opgebouwd uit 1×1×1-kubusjes je kunt maken die in een 3×3×3-kubus passen. Haar broer, de wiskundige Arjeh Cohen, kon dat uitrekenen. Maar het antwoord hangt natuurlijk af van wat je precies onder 'figuur' en onder 'verschillend' verstaat.
Het antwoord mondde uit in het project *Eén Model*, dat bestaat uit een 32 uur durende videoanimatie. De 1200 interessantste figuren zijn werkelijk gemaakt, van houten kubusjes, en als kunstwerk tentoongesteld bij een bedrijf in Delft.
Voor meer informatie: *https://www.nemokennislink.nl/publicaties/kubisme-2-0/*
Bron: *WiskundePersDienst*

100 % priempolynomen



Naarmate de getallen groter worden, worden de priemgetallen onder hen zeldzamer. Zo zeldzaam, dat het percentage priemgetallen naar nul gaat. Hoe anders is het met de zogenaamde priempolynomen: polynomen met gehele coëfficiënten die niet te schrijven zijn als het product van twee kleinere polynomen met alleen gehele coëfficiënten. In een recent onderzoek bestudeerden de

Franse wiskundige Emmanuel Breuillard en de Hongaarse wiskundige Péter Varjú van de universiteit van Cambridge de zogeheten Newman-polynomen. Zo'n polynoom is de som van minstens twee termen; de eerste term is een macht van x en de laatste term is 1. Daartussen kunnen nog kleinere machten van x staan, maar dat is niet nodig.

Voorbeelden zijn $x^5 + 1$, $x^3 + x^2 + x + 1$ en $x^{19} + x^4 + 1$. Van deze voorbeelden zijn de eerste twee geen priem-polynomen: $x^5 + 1 = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$ en $x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1)$. De eerste factor is overigens geen Newman-polynoom vanwege de mintekens. Maar $x^{19} + x^4 + 1$ is wel een priempolynoom. Breuillard en Varjú bewezen dat in het limietgeval 100 procent van de Newman-polynomen priem is. Er zijn weliswaar oneindig veel van deze polynomen niet priem, maar deze worden steeds spaarzamer (net als de priemgetallen, maar dan omgekeerd). Voor cryptografen is het bewijs van Breuillard en Varjú goed nieuws. In de moderne cryptografie spelen priemgetallen een wezenlijke rol.

Veilig internetbankieren is mogelijk omdat het erg moeilijk is om grote getallen in priemfactoren te ontbinden. Als de Newman-polynomen niet in groten getale priem waren geweest, was dit wellicht minder moeilijk geweest.
Elk Newman-polynoom correspondeert met een natuurlijk getal via diens binaire notatie:
$287 = 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1\ 1 \cdot 2^0$ correspondeert met $x^8 + x^4 + x^3 + x^2 + x^1 + 1 =$ $(x^2 + x + 1)(x^6 - x^5 + x^3 + 1)$.
Nu $x = 2$ invullen geeft $287 = 7 \cdot 41$.
En voor Newman-polynomen bestaat er wél een efficiënt ontbindingsalgoritme als zo'n ontbinding bestaat. Er is nog een kleine mits: in hun bewijs veronderstellen Breuillard en Varjú de juistheid van de (gegeneraliseerde) Riemannhypothese…
Bron: *NRC 16 en 17 februari 2019*

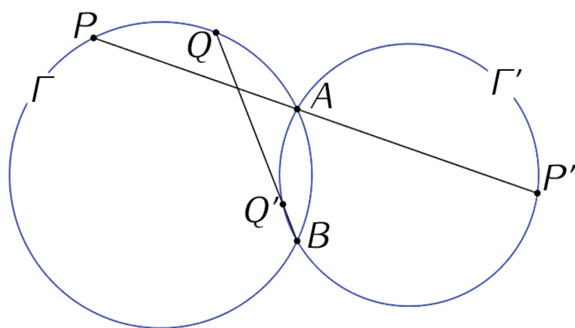
TWEE MEETKUNDIGE MINIATUREN

Dick Klingens

Dubbelkoorden en halve-dubbelkoordencirkels kunnen gebruikt worden om de bewijzen te leveren van de meetkundige 'miniaturen' aan het einde van het artikel.

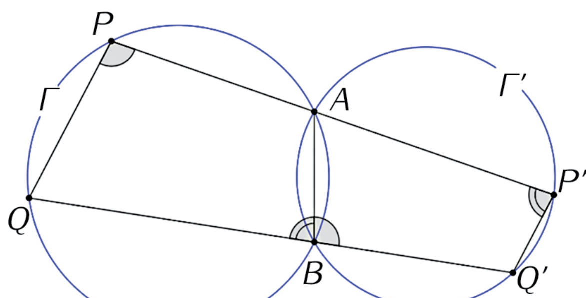
Inleiding

Iedereen heeft het wel eens: je hebt iets gelezen of gezien en je vindt dat ook anderen daarvan kennis zouden moeten nemen. Bij mij is dat soms het geval met meetkundige 'miniaturen'. Vandaar dit artikel, waarin ik aan het eind twee van die miniatuurtjes laat zien.[1]
Maar eerst wat 'hulpmiddelen' om de (nieuwe?) kennis wat makkelijker tot je te kunnen nemen...



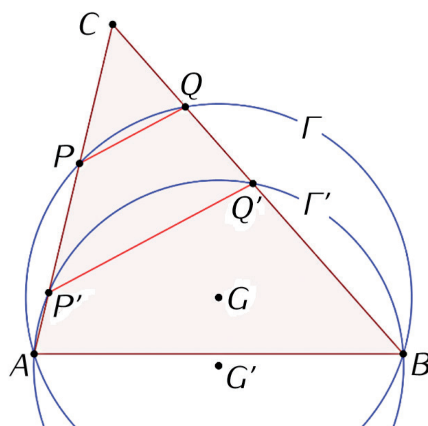
figuur 1

In figuur 1 staan twee elkaar in de punten A en B snijdende cirkels Γ en Γ'. Een lijnstuk als PP' noem ik hier *dubbelkoorde* (notatie: PAP'), omdat het ene eindpunt van het lijnstuk op Γ en het andere op Γ' ligt, én omdat A (c.q. B) *op* het lijnstuk ligt. Ook QBQ' is een dubbelkoorde: Q op Γ, Q' op Γ' en B op een verlengde van het lijnstuk QQ'. En wat de notatie betreft: bij een dubbelkoorde staat de naam van een 'cirkelsnijpunt' dus *altijd* tussen de namen van de eindpunten van het lijnstuk.
Een eerste eigenschap is geïllustreerd in figuur 2: als PAP' en QBQ' twee dubbelkoorden van Γ en Γ' zijn, dan is PQ evenwijdig met $P'Q'$.



figuur 2

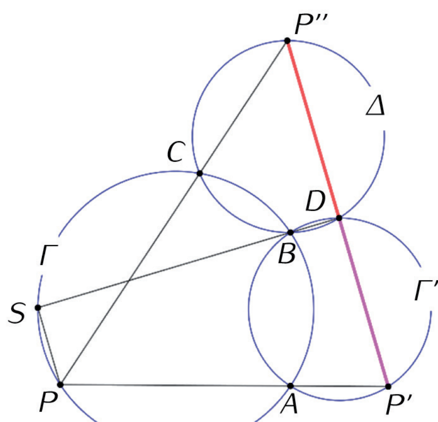
Het bewijs is redelijk elementair. Het ligt voor de hand het lijnstuk AB te tekenen en dan te kijken naar de koordenvierhoeken $PQBA$ en $P'Q'BA$.
Nu is: $\angle APQ = \angle ABQ'$ en $\angle AP'Q' = \angle ABQ$ (*binnenhoek* en *overstaande buitenhoek*)
waaruit blijkt dat:
$\angle APQ + \angle AP'Q' = 180°$
Deze hoeken zijn 'binnenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn PP' van de lijnen PQ en $P'Q'$. En dus is:
$PQ \parallel P'Q'$.
De eigenschap wordt ook wel eens de 'stelling van Reim' genoemd.[2]



figuur 3

Een toepassing van de stelling van Reim staat in figuur 3: twee cirkels die beide door de hoekpunten A en B van een driehoek ABC gaan, snijden de zijden CA en CB met evenwijdige koorden PQ en $P'Q'$.[3]

Als je aan twee snijdende cirkels nog een derde cirkel toevoegt die door één van de snijpunten van de eerste twee gaat én beide snijdt, dan ontstaat een configuratie als in figuur 4 (p. 36).

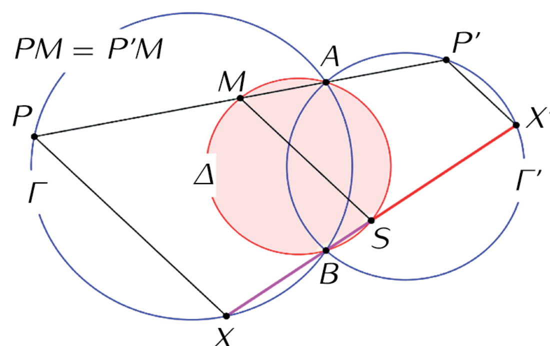


figuur 4

Cirkel Δ, die gaat door het snijpunt *B* van de cirkels Γ en Γ′, is de toegevoegde cirkel. De andere snijpunten van Δ met die cirkels zijn *C* en *D*. Het punt *P* ligt *willekeurig* op Γ en *PAP′* is een dubbelkoorde (van Γ en Γ′), evenals *PCP″* (van Γ en Δ). De bewering "dan is P′DP″ een dubbelkoorde van Γ′ en Δ" vraagt natuurlijk om een bewijs!
En dat bewijs volgt nu.
Ik teken de dubbelkoorde *DBS* van Γ′ en Γ. Volgens de stelling van Reim is nu *DP′* // *PS* (let wel, *DP′* is een lijnstuk). De lijnstukken *PCP″* en *SBD* zijn dubbelkoorden van Γ en Δ. En hier is volgens die zelfde stelling *PS* // *DP″* (ook *DP″* is een lijnstuk). We hebben dus twee lijnstukken die evenwijdig zijn aan hetzelfde lijnstuk, dus hebben we ook *twee lijnen* (namelijk de drager van *DP′* en de drager van *DP″*) die evenwijdig zijn met *dezelfde lijn* (namelijk met de drager van *PS*).
Het komt niet zo vaak voor dat in een bewijs een beroep op het 5e postulaat van Euclides nodig is: door een punt (hier is dat *D*) buiten een lijn (hier is dat de drager van *PS*) gaat precies één lijn die evenwijdig is met die lijn.[4]
Dus is ∠*P′DP″* = 180º, waarmee bewezen is dat *P′DP″* inderdaad een dubbelkoorde is.[5]

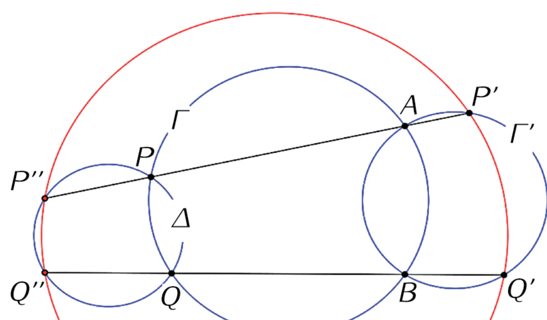
Natuurlijk kan zo'n derde cirkel ook op een andere manier worden toegevoegd. In figuur 5 gaat de cirkel Δ door de eindpunten (*P* en *Q*) van twee dubbelkoorden (*PAP′* en *QBQ′*) die op *dezelfde* cirkel Γ liggen. De punten *P″* en *Q″* zijn daarbij dan weer eindpunten op Δ van *P″PA* en *Q″QB*. En dan is er zoals blijkt direct een vierde cirkel.

Een bewijs van het concyclisch zijn van de punten *P′*, *Q′*, *P″*, *Q″* staat in paragraaf 3 van de appendix bij dit artikel.[1]
Hetzelfde bewijs staat trouwens ook in de referentie die vermeld is in[2].
Zo'n derde cirkel kan natuurlijk ook door de snijpunten *A*, *B* van Γ en Γ′ gaan. Ik doe dat als volgt; zie figuur 6. Ik kies een dubbelkoorde *PAP′* en bepaal het midden *M* van het lijnstuk *PP′*. De toegevoegde cirkel Δ is dan de cirkel door *A*, *B* en *M*.

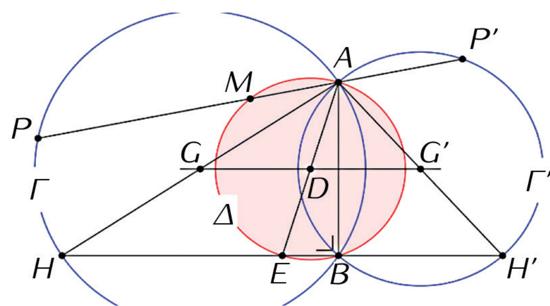


figuur 6

Tja, en als ik dan een andere, willekeurige dubbelkoorde bekijk, bijvoorbeeld *XBX′* waarbij[6] *S* = *XX′* & Δ, dan rijst onmiddellijk de vraag of *S* wellicht het midden is van het lijnstuk *XX′*. Het antwoord is 'ja', en het bewijs daarbij is zeker niet ingewikkeld.
Volgens de stelling van Reim, toegepast op de dubbelkoorden *PAP′* en *XBX′* (van Γ en Γ′), is *PX* // *P′X′*, zodat vierhoek *PXX′P′* een trapezium is. Volgens die zelfde stelling, nu toegepast op de dubbelkoorden *PAM* en *XBS* (van Γ en Δ), is *PX* // *MS*, en daarmee is *MS* de middenparallel in dat trapezium. Dus: *S* is het midden van *XX′*.
Met andere woorden: van alle dubbelkoorden *XBX′* ligt het midden op de cirkel Δ.

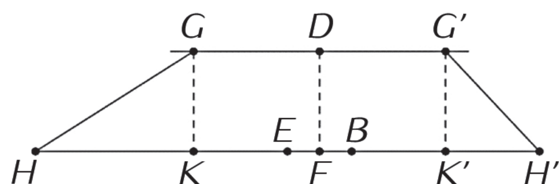


figuur 5



figuur 7

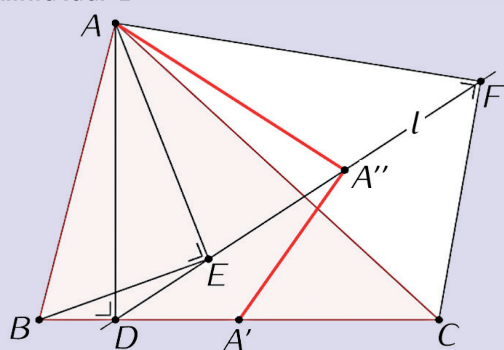
Om de ligging van het middelpunt D van de cirkel Δ te vinden kijk ik naar een bijzondere dubbelkoorde in figuur 7. Allereerst: is G het middelpunt van Γ en G' dat van Γ', dan zijn D, G, G' collineair; ze liggen immers alle drie op de middelloodlijn van het lijnstuk AB.
Zijn nu H, H' en E de tegenpunten van A op Γ, van A op Γ' en van A op Δ, dan liggen die punten ook op de dubbelkoorde HBH', omdat de driehoeken AHB, $AH'B$ en AEB alle rechthoekig zijn in B (*cirkelstelling van Thales*). Daarbij komt: GG' is een middenparallel in driehoek AHH'. De punten G, D, G' liggen óók op de middelloodlijnen van de lijnstukken HB, EB en BH'.



figuur 8

Zie nu figuur 8. Daarin zijn K, F, K' de loodrechte projecties van G, D, G' op HH'. Omdat E het midden is van HH', is $KF = K'F$ (neem even de tijd om te controleren!). En dan is in de rechthoek $KK'G'G$ het punt D het midden van GG'. Daarmee is aangetoond dat het middelpunt D van Δ samenvalt met het midden van de centraal GG' van de cirkels Γ en Γ'.
Ik noem de cirkel die gaat door de middens van de dubbelkoorden van twee 'cirkels van Reim' – en dat zijn steeds snijdende cirkels – de *hdk-cirkel* ('halve-dubbelkoordencirkel' [7]) van die cirkels.
Genoeg over de hulpmiddelen. Tijd voor de beloofde miniaturen.

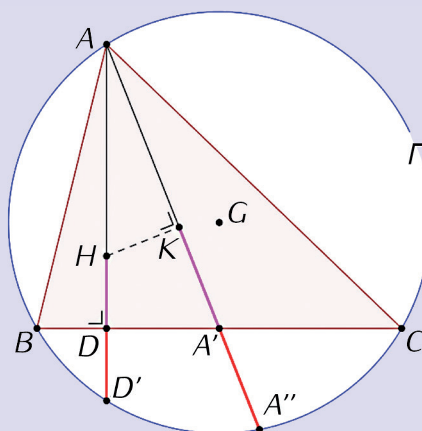
Miniatuur 1



figuur 9

Zie figuur 9. Gegeven is een driehoek ABC waarvan AD een hoogtelijn is. De lijn l gaat door D en is verder willekeurig. E ligt zó op l dat $AE \perp BE$, en F ligt zó op l dat $AF \perp CF$. A' is het midden van BC, A'' is het midden van EF.
Toon aan dat $AA'' \perp A'A''$.

Miniatuur 2



figuur 10

Zie figuur 10. Van driehoek ABC met omcirkel Γ (middelpunt G) is AA' een zwaartelijn, waarbij verder $A'' = A' \,\&\, \Gamma$. Het punt K is de loodrechte projectie van het hoogtepunt H op die zwaartelijn.
Toon aan dat A' het midden is van het lijnstuk KA''.

Bij de oplossing van dergelijke problemen moet je natuurlijk de juiste hulpmiddelen kiezen, deels aan de hand van herkenbare zaken in de figuur. Welnu, in miniatuur 1 zitten in ieder geval drie rechthoekige driehoeken en er wordt gesproken over middens van lijnstukken.
In miniatuur 2 zijn er ook drie rechthoekige driehoeken te herkennen. En een bekende eigenschap in de figuur is dat D het midden is van het lijnstuk HD'. Verder moet er bij een tweede lijnstuk iets bewezen worden over het midden ervan.
Het gebruik van de *hdk-cirkel* ligt dus bij beide miniaturen voor de hand.
De oplossing van beide problemen is te vinden in paragraaf 4 van de appendix.[1] In paragraaf 5 van die appendix staat trouwens ook een *analytisch* bewijs van het feit dat de *hdk-cirkel* de meetkundige plaats is van de middens van de dubbelkoorden van twee snijdende cirkels.

De appendix is te downloaden van:

vakbladeuclides.nl/946klingens

Noten

[1] De appendix bij dit artikel is te downloaden van de *Euclides*-site: https://nvvw.nl/euclides/

[2] Naar Anton Reim (1832-1922, Duits Bohemen/Sudetenland). Zie ook: Klingens, D. (2015). *Cirkels van Reim*. Ongepubliceerd artikel; elektronisch beschikbaar via*: http://home.hccnet.nl/d.klingens/downloads/CirkelsVanReim_vs2.pdf*
In [1] staat ook het bewijs van de omgekeerde stelling van Reim (paragraaf 1).

[3] F.G.-M. (1920). *Exercices de Géométrie*. Parijs: Rééditions Jacques Gabay (1991), p. 283, théorème 124.

[4] Dit is het zogeheten *parallellenpostulaat.* Hier is dat postulaat tekstueel vervangen door het zogenoemde *axioma van Playfair*, dat met het door Euclides geformuleerde (5e) postulaat equivalent is.

[5] Wat hier bewezen is, is eigenlijk de 'stelling van Miquel', door Auguste Miquel (1816-1851, Frankrijk) gepubliceerd in 1844. Deze stelling luidt, refererend aan figuur 4: Gaan drie elkaar snijdende cirkels Γ, Γ', Δ door hetzelfde punt B, zijn A, C, D de andere snijpunten, is P een *willekeurig* punt van Γ, en is (zie ook [6]) $P' = PA \mathbin{\&} \Gamma'$, $P'' = PC \mathbin{\&} \Delta$, dan zijn D, P', P'' collineair.
In paragraaf 2 van [1] staat een bewijs van de *omgekeerde* stelling van Miquel, alleen gebaseerd op koordenvierhoeken.

[6] In hetgeen volgt betekent $P = X \mathbin{\&} Y$: het punt P is het (c.q. een nog niet benoemd) snijpunt van de meetkundige objecten X en Y.

[7] Een naam voor de bedoelde cirkel zou 'middencirkel' kunnen zijn. Echter, die naam is in de Nederlandse wiskundeliteratuur reeds aan een andere bijzondere cirkel toegekend (en dus niet alleen aan een deel van de belijning van een sportveld). Zie: *https://nl.wikipedia.org/wiki/Middencirkel_%28meetkunde%29*

Over de auteur

Dick Klingens was van januari 2000 tot augustus 2014 (eind)redacteur van *Euclides*. Tot aan zijn pensioen in 2010 was hij ook wiskundeleraar, lerarenopleider bij het technisch beroepsonderwijs en schoolleider. Gedurende enkele jaren was hij lid van de cTWO-ontwikkelgroep meetkunde voor wiskunde B vwo (eindexamen vanaf 2018).

Tanja Stroosma

OVERPEINZINGEN VAN EEN BIJLESDOCENT

Steeds meer leerlingen volgen naast de lessen op school ook een vorm van bijles, bij studenten, privédocenten of bij de huiswerkbegeleidingsinstituten waarvan er steeds meer lijken te ontstaan. Tanja Stroosma beschrijft haar ervaringen als bijlesdocent.

Inleiding

Heb je ook wel eens leerlingen die vinden dat ze in de les niets hoeven te doen omdat ze vanmiddag tóch huiswerkbegeleiding hebben? Hoor je ook wel eens dat een bijlesdocent alles heel anders uitlegt dan jij en is jouw leerling daardoor helemaal in verwarring geraakt? Heel vervelend en zeer ongewenst natuurlijk…
Toch horen bijles en huiswerkbegeleiding er de laatste jaren steeds meer bij. Scholieren hebben steeds vaker leerhulp naast school. In de media wordt dit ook wel schaduwonderwijs genoemd. Dit buitenschoolse onderwijs wordt steeds vaker door mensen gegeven die dit niet als bijbaan maar als professionele activiteit uitvoeren. Sommigen daarvan zijn volledig bevoegd wiskundedocent: ik ben er een van.
In dit artikel wil ik je graag een inkijkje geven in de praktijk van een professionele bijlesdocent en wil ik mijn gedachten over de toekomst van het bijles geven delen. Dat doe ik aan de hand van vier leerlingen die een verschillende motivatie hebben om wiskundebijles te volgen.

Realistisch of abstract of écht realistisch?

Leerling A is net begonnen in 3 gymnasium en in de voorgaande jaren ging wiskunde niet goed. Ondertussen zit hij in een neerwaartse spiraal: hij krijgt iedere keer een lager cijfer dan hij zelf verwacht en hij wordt dus steeds gespannener voor de volgende toets. Daar komt nog bij dat dit vermoedelijk de eerste keer in zijn leven is dat leren niet goed gaat: leerling A heeft een spectaculair hoog IQ. Al met al vergalt wiskunde ondertussen zijn leven!

Op school vindt men zijn opkomende faalangstigheid zeer zeker een zorg maar in principe worden de wiskundecijfers van deze leerling niet als een groot probleem gezien: zijn cijfer ligt altijd tussen de 4,5 en de 6. Extra ondersteuning van een bovenbouwleerling helpt hem niet verder. Ouders en zoon zoeken iets wat de school op dat moment niet kan geven want het probleem is niet groot genoeg. Daarom zoeken ze bijles wiskunde voor hun zoon.
Tijdens die bijlessen blijkt leerling A zijn volledige algemene ontwikkeling in te zetten bij iedere wiskunde-opgave. Die algemene ontwikkeling is indrukwekkend. Het zit hem echter enorm in de weg.
Een voorbeeld: de stelling van Pythagoras in een realistische opgave: een muur met een ladder ertegenaan. Wij, docenten, vinden het vanzelfsprekend dat de ladder binnen deze opgave opgevat moet worden als een oneindig dun lijnstuk. Leerling A vindt dat helemaal niet vanzelfsprekend: deze ladder heeft een bepaalde dikte en moet je nu rekenen met de binnenkant, de buitenkant, het midden van binnenkant en buitenkant?
Deze leerling heeft tijdens de bijlessen kunnen leren dat het, in een hoofdstuk over abstracte driehoeken, zeer waarschijnlijk is dat je de realistische situatie moet modelleren tot een abstracte driehoek. Hij heeft ook kunnen oppikken dat hij, met zijn neiging tot doordenken, bij elke opgave eerst moet bedenken wat het lesboek (de docent, de opgavemaker) binnen de context van de huidige lesstof zeer waarschijnlijk zal bedoelen en dat hij realistische context zelf eerst abstract moet maken.

De kloof tussen vmbo-t en havo

Leerling B heeft diploma vmbo-t op zak en is net begonnen in 4 havo, met de ambitie om daarna ook nog vwo te doen. Alleen: wiskunde op de havo is echt veel abstracter (ook bij wiskunde A) dan op het vmbo. De ene leerling lukt het om meteen een brug te slaan tussen de oude en de nieuwe manier van denken, maar voor leerling B blijkt de kloof wel heel erg groot, ondanks de extra inspanning van de schooldocent tijdens de les en ondanks het feit dat school een aantal extra wiskundelessen direct na het eindexamen had aangeboden. Met wat bijlessen lukt het toch om de kloof te overbruggen.

Schoolcarrière op een te laag niveau

Leerling C is superambitieus maar haar ouders ondersteunen haar daar niet in: havo met wiskunde A vinden zij meer dan genoeg voor een meisje. Ze doet nu een hbo-opleiding maar ze wil zo snel mogelijk naar de universiteit en heeft daar wiskunde B op vwo-niveau voor nodig. Buiten medeweten van haar ouders heeft ze zich ingeschreven bij een particulier exameninstituut. Omdat de stap van havo wiskunde A naar vwo wiskunde B pittig is, lukt het haar niet met alleen de lessen die het examen-instituut biedt. Met behulp van enkele bijlessen probeert ze op het juiste niveau te komen. Al dit extra onderwijs bekostigt ze met het salaris van het baantje dat ze ook nog heeft...

Onduidelijk verschil tussen Citoscore en prestaties in de brugklas

Leerling D zit in een brugklas havo/vwo en had in groep 8 slechts één fout in haar Citotoets: de verwachtingen waren hoog gespannen! Toch lukt het maar niet met de wiskundetoetsen. De wiskundedocent geeft aan dat het er naar uitziet dat leerling D te hoog geplaatst is. Ouders en leerling vinden dat heel vreemd vanwege die Citoscore en vermoeden dat er meer aan de hand is. Door dit alles wordt leerling D ook steeds onzekerder en ze wordt paniekerig vlak voor een wiskundetoets.
Tijdens de bijlessen lijkt het eerst alsof leerling D alles oppikt wat ik haar uitleg: na een uitleg kan ze zelf opgaven maken, ook opgaven die niet helemaal op het voorbeeld lijken. Maar als ik vraag om uitwerkingen zelf uit te leggen (waarom moet het zus en niet zo?) blijft het stil. Is dat onzekerheid? Verlegenheid? Naarmate ik het wiskundig denken van leerling D vaker kan observeren en met haar over uitwerkingen praat, krijg ik steeds meer het idee dat ze vooral een fenomenaal fotografisch geheugen lijkt te hebben. In een telefoongesprek met moeder wordt die indruk bevestigd: op de basisschool stond ze daar om bekend. Later in het jaar blijken er ook grote problemen met andere vakken op te treden: deze leerling is inderdaad te hoog geplaatst. Ze weet heel veel maar begrijpt te weinig van wat ze weet. Dat is een enorme tegenvaller voor leerling D, maar voor haar ouders (en hopelijk later voor haarzelf ook) is nu in ieder geval duidelijk hoe het zit met hun dochter en zijn zij het eens met het oordeel van de school.
Blijkbaar is het dus mogelijk om zo'n goed fotografisch geheugen te hebben dat je daarmee slechts één fout in de Citotoets kunt maken en dat je daarmee dus ook verschillende vormen van opgaven kunt onthouden: heel bijzonder eigenlijk.

Maatschappelijke impact

Dit is zomaar een greep uit de leerlingen in mijn bijlespraktijk. Veel leerlingen hebben baat bij nét even een paar extra privélesjes, om wat voor persoonlijke reden dan ook. Omdat het aantal leerlingen dat toegang heeft tot extra bijlessen flink is gestegen de afgelopen jaren, ontstaat een tweedeling tussen jongeren die toegang hebben tot extra bijlessen en jongeren die dat niet hebben.

De maatschappelijke discussie hierover is al begonnen: neem bijvoorbeeld de discussies naar aanleiding van het boek *De bijlesgeneratie* van Louise Elffers. In *NRC* van 21 september 2018 bijvoorbeeld staat in grote letters de tekst: 'Bijles zorgt ervoor dat onderwijs als vanouds de standenmaatschappij in stand houdt'. Ik ben me hiervan bewust maar om persoonlijke redenen geef ik toch bijles om in mijn eigen onderhoud te kunnen voorzien. Een van de mogelijke oplossingen is een bijlessubsidie voor gezinnen die het anders niet kunnen betalen en natuurlijk zou deze oplossing mijn vervelende gevoel oplossen. Ik zie dan zelfs een toekomst van scholen die zowel klassendocenten als bijlesdocenten in dienst hebben, al naar gelang de voorkeur van de docent in kwestie! Maar als samenleving willen en kunnen we dat zeer waarschijnlijk niet bekostigen, ben ik bang. En vermoedelijk zullen velen van jullie hier ook tegen zijn: als er meer overheidsgeld naar onderwijs gaat, dan weten jullie vast en zeker wel allerlei andere noodzakelijke uitgaven aan schoolgebouw, materialen, kleinere klassen, enzovoorts. Snap ik helemaal.

'DOOR ALLE MAATSCHAPPELIJKE ONTWIKKELINGEN ZAL ER EEN BLIJVENDE VRAAG NAAR BIJLES NAAST SCHOOL ZIJN.'

Professionaliteit van de bijlesdocent

Een ding is zeker in mijn beleving: door alle maatschappelijke ontwikkelingen zal er een blijvende vraag naar bijles naast school zijn. Veel bijlessen worden gegeven door amateurdocenten zoals eerstejaars bètastudenten. Voor een enkel bijlesje is dat natuurlijk geen probleem. Maar er zijn ook veel leerlingen die gedurende hun hele schoolcarrière regelmatig wiskundebijles blijven volgen en dan wordt het in mijn ogen wel degelijk belangrijk dat ook de bijlesdocent vakdidactisch is opgeleid. Voor de leerlingen en hun leerproces zou het verder goed zijn als er een samenwerking tussen schooldocent en bijlesdocent kan bestaan, daar waar nodig. Dit kan ook voor de schooldocent een voordeel opleveren: de bijlesdocent kan dan beter aansluiten op de lessen op school.

Mijn docentenopleiding ging er voorheen vanuit dat ze docenten opleiden die voornamelijk klassikaal werken: logisch. Maar nu ben ik geïnteresseerd in onderzoek op het gebied van privéwiskundeonderwijs, zowel didactisch als pedagogisch/psychologisch: misschien dat de docentenopleiders en onderzoekers onder jullie mij wat tips kunnen verschaffen? Na een jaar of zes bijna fulltime wiskundebijles geven, heb ik zo mijn eigen ervaringen en ideeën over specifieke zaken rondom privéles. Natuurlijk ben ik ook heel benieuwd naar wat jij als schooldocent vindt van een toekomst waarin bijlessen meer onderdeel zijn van het totale onderwijspalet van de leerlingen. Het lijkt mij erg inspirerend om onze bevindingen te vergelijken met eerdergenoemd onderzoek. Daar kan ik dan ook weer een vervolgartikel over schrijven, indien er interesse voor zou zijn...

Over de auteur

Tanja Stroosma heeft al jaren haar eigen bijlespraktijk (Wis & Zeker) in Leiden.
Ze heeft ruim zes jaar voor de klas gestaan.
E-mailadres: *ts@wisenzeker.nl*

MEDEDELING

VAKANTIECURSUS 2019 DEEP LEARNING

Voor leraren in de exacte vakken aan havo-, vwo- en hbo-leerlingen organiseert het Platform Wiskunde Nederland (PWN) in 2019 een vakantiecursus met als thema: 'Deep Learning: Van meetdata via datarepresentatie naar voorspellen'. Het is een tweedaagse cursus in Amsterdam (23 en 24 augustus) en Eindhoven (30 en 31 augustus).

De cursus is voor wiskundedocenten van elk niveau toegankelijk en geldt als nascholingsactiviteit. Deelnemers ontvangen bij aanvang van de cursus een syllabus met teksten van de voordrachten. Het cursusgeld bedraagt €99. Voor studenten van lerarenopleidingen is het cursusgeld slechts €39. Voor gepensioneerden geldt een speciaal tarief van €55. Bij de cursus is inbegrepen een warme maaltijd op vrijdag en een lunch op zaterdag.

Meer informatie over de inhoud van de cursus en de aanmelding: *http://www.platformwiskunde.nl/vakantiecursus*

WISKUNDE VOOR STRAATKINDEREN IN MALAWI

Evert van de Vrie

Hoe geef je kinderen die niet meer naar school gaan weer een kans om aan hun toekomst te bouwen? Dat is de uitdaging voor Samaritan Trust in Malawi. Dit leidde tot initiatieven die variëren van het bieden van onderdak tot onderwijs op middelbare school niveau. Een bericht van het WereldWiskunde Fonds door Evert van de Vrie.



Vakopleidingen

Een belangrijk onderdeel van de aanpak van Samaritan Trust is het bieden van vakopleidingen, bijvoorbeeld timmerman, metselaar of kleermaker. Daarmee maken de kinderen kans op de arbeidsmarkt en kunnen ze een eigen inkomen verdienen.



figuur 1 Schoolboeken aangeschaft met hulp van het WWF

Daarnaast wordt ook geïnvesteerd in basis- en middelbaar onderwijs, zodat de kinderen hun capaciteiten breder ontwikkelen. Omdat het vaak om drop-outs gaat, die een aantal jaren onderwijs hebben gemist, zijn de leerlingen meestal ouder en is een individuele aanpak en begeleiding gewenst.

Belang van wiskunde

Gebleken is dat het van belang is dat er voldoende aandacht wordt gegeven aan het wiskundeonderwijs. In veel andere vakken wordt wiskunde immers toegepast. Om het wiskundeonderwijs te verbeteren, heeft de Samaritan Trust subsidie aangevraagd bij het Wereldwiskunde Fonds.

Een eerste project, gericht op een vijftigtal leerlingen, is in 2018 uitgevoerd en bestond voor een fors deel uit de aanschaf van schoolboeken en lesmaterialen. Daarnaast kon een extra leerkracht worden ingezet voor meer begeleiding bij de wiskundelessen en kon er bijscholing worden gegeven aan de leraren. Het project leidde tot beter begrip van het belang van wiskunde en betere resultaten. Daarnaast werden er 'wiskundewedstrijdjes' (Mathelete) georganiseerd om de het plezier in wiskunde te vergroten. Ondertussen is een vervolg subsidie-aanvraag ontvangen en goedgekeurd om door te gaan op de ingeslagen weg.



figuur 2 De diploma-uitreiking

Over de auteur

Evert van de Vrie is docent wiskunde aan de Open Universiteit en voorzitter van het Wereldwiskunde Fonds.
E-mailadres: *Evert.vandeVrie@ou.nl*

VASTGEROEST

Ab van der Roest

EEN DOCENT DENKT SOMS ERG TRAAG

Zetten denkopgaven altijd aan tot denken? Soms pas na een tijdje en met een herformulering, ontdekte Ab van der Roest.

In vwo-5 kwam bij wiskunde B de volgende opgave, gemarkeerd met een D van 'denkopgave' aan de orde:

Gegeven is dat de derdegraadsfunctie $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ twee extreme waarden heeft.
Toon aan dat hieruit volgt dat $b^2 > 3ac$
Toon aan dat elke derdegraadsfunctie precies één buigpunt heeft en dat voor het geval de derdegraadsfunctie twee toppen A en B heeft voor het buigpunt C geldt dat $2x_C = x_A + x_B$.

De leerlingen kregen de opdracht hieraan te werken, maar het lukte Heidie niet om dit probleem zelfstandig en met haar buurvrouw op te lossen. Omdat ze niet de enige was, heb ik na enige tijd deze opgave klassikaal besproken.

Wat me opviel is dat de opbouw van de som niet dwingt tot denken, maar meteen stuurt naar de algebra. De grafiek heeft twee toppen, dus moet de afgeleide gelijkgesteld aan 0 twee oplossingen hebben. Omdat de afgeleide een tweedegraadsfunctie is, komt meteen de discriminant in beeld en het eerste onderdeel is klaar. Rekenen met onbekende coëfficiënten is in vwo 5 blijkbaar al denken!

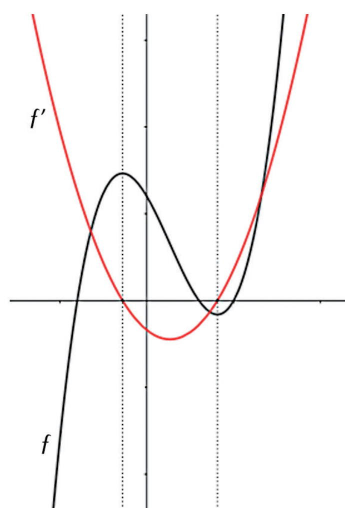
Het b-onderdeel van de opgave stuurt opnieuw, zonder dat een leerling lang na hoeft te denken, meteen naar de tweede afgeleide. $6ax + 2b = 0$ is een lineaire vergelijking en om dat $a \neq 0$ is er altijd precies één oplossing $x_C = \frac{-b}{3c}$.

Bij het eerste onderdeel is al naar de discriminant van de vergelijking $3ax^2 + 2bx + c = 0$ gekeken en de oplossingen van deze vergelijkingen zijn dus met de a, b, c - formule te vinden: $x_{A,B} = \frac{-2b \pm \sqrt{D}}{6a}$.

Optellen van de oplossingen geeft het gevraagde. Klaar. Samen met Heidie die de vraag stelde een bevredigend antwoord geproduceerd.

Totdat...

ik een week later een wiskunde A les voorbereidde voor 6 vwo. Het hoofdstuk heet 'Toepassingen van de differentiaalrekening' en bij de voorkennis grijpen de schrijvers terug naar hellinggrafieken. Er moet een hellinggrafiek van een derdegraadsfunctie met twee toppen getekend worden, zie figuur 1.



figuur 1

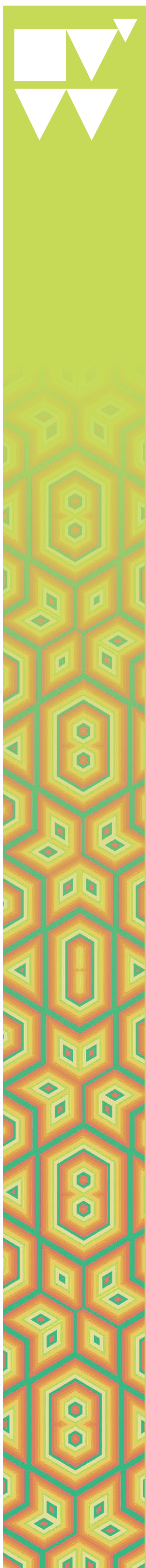
Vanzelfsprekend is dit een parabool met twee snijpunten met de x-as. Vanwege de symmetrie is de x_{top} precies het gemiddelde van de x-waarden van die snijpunten en vanzelfsprekend hoort hierbij de maximale/minimale helling en dus het buigpunt. Het duurde dus een week totdat ik echt ging denken en het toont maar weer aan hoe moeilijk het is om goede denkopgaven te maken.

Ik vermoed dat de opgave veel beter had kunnen luiden:
Gegeven is dat de derdegraadsfunctie
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ twee extreme waarden heeft.
Toon aan dat voor het buigpunt C geldt dat $2x_C = x_A + x_B$ met x_A en x_B de x-coördinaten van de toppen.

Mogelijk dat deze opgave echt tot denken aan zou zetten en dat er op deze manier meerdere antwoorden zouden ontstaan die tot een gesprek met de klas zouden leiden. In ieder geval wordt vermeden dat de opgave naar een bepaalde oplossing stuurt.

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal. E-mailadres: *rst@ichthuscollege.nl*



MEDEDELING

BESTUURSWERK: WAT VRAAGT HET, WAT BRENGT HET?

Een vast agendapunt van de jaarvergadering is de verkiezing van nieuwe bestuursleden. En gelukkig bieden zich altijd leden aan om belangeloos een deel van hun tijd in de vereniging te stoppen. In dit stukje verenigingsnieuws wil ik een beeld geven van de werkzaamheden van leden van het algemeen bestuur (ab) en van onderwerpen die in de vergaderingen aan de orde komen.
Het dagelijks bestuur (voorzitter, secretaris en penningmeester, db) komt samen met de beleidsmedewerkster maandelijks bij elkaar om de lopende zaken te bespreken en de vergadering van het algemeen bestuur (ab) voor te bereiden. Het ab bestaat momenteel uit tien leden (inclusief de leden van het db). Het ab komt tien keer per schooljaar bijeen op woensdagmiddag van 15.00 tot 18.00 uur in Utrecht.

De bestuursleden hebben allemaal een connectie met het wiskundeonderwijs in het voortgezet onderwijs. De meerderheid geeft wiskunde op een school voor voortgezet onderwijs in vmbo of havo-vwo, maar er zijn ook bestuursleden die hun hoofdtaak hebben op een eerste- of tweedegraadslerarenopleiding, binnen het mbo of hbo, of bij het Freudenthal Instituut.
Na een periode van oriëntatie op het bestuurswerk kan een bestuurslid zich verbinden aan een van de vele onderwerpen die aan de orde zijn, afhankelijk van interesse en expertise.
Een greep uit de onderwerpen en activiteiten:

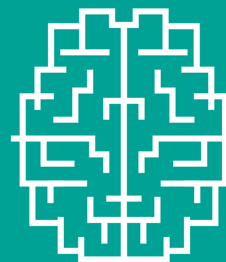
- namens het bestuur deelnemen aan de bijeenkomsten van het Platform VVVO en de Onderwijskamer van FvOv (elk vier keer per jaar), waar met bestuursleden van andere vakverenigingen informatie wordt uitgewisseld over bijvoorbeeld: Curriculum.nu, het lerarenportfolio of de inleverdata voor de tweede correctie van het examenwerk;
- inventariseren welke zaken er spelen n.a.v. de examens en deze inbrengen voor het jaarlijkse overleg dat bestuursleden hebben met de CvTE;
- contact houden met werkgroepen van de vereniging, zoals de vmbo-werkgroep, de havo-vwo-werkgroep, de werkgroep mbo-hbo, het Wereldwiskunde Fonds, de werkgroep geschiedenis of de werkgroep wiskunde voor morgen;
- samen met andere bestuursleden standpunten bepalen over onderwerpen als het rekenonderwijs of het lerarenportfolio om daarmee het db te voorzien van input voor het overleg met het ministerie van OCW over deze onderwerpen;
- voorbereiden van jaarvergadering en studiedag, zowel inhoudelijk als organisatorisch;
- deelnemen aan tijdelijke commissies, bijvoorbeeld de commissie die zich gebogen heeft over de inzet van de grafische rekenmachine bij examens;
- nadenken over nieuw beleid en daaruit voortvloeiende acties initiëren.

En wat krijg je er als bestuurslid voor terug? Inspirerende contacten met collega's die in andere sectoren van het (wiskunde)onderwijs werkzaam zijn. Bezig zijn met je vak vanuit een ander perspectief dan het dagelijks werk met leerlingen in de klas. Ervaren dat je als bestuur mede richting kunt geven aan beleid op diverse niveaus.

Met ingang van november 2019 zijn er nieuwe bestuursleden nodig. Wil je vrijblijvend informatie over het bestuurswerk, neem dan contact op met ondergetekende.

Kees Garst, secretaris van de NNvW.
E-mailadres: *secretaris@nvvw.nl*

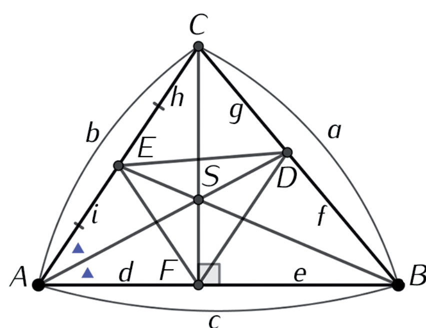
PUZZEL 94-6



Lieke de Rooij
Wobien Doyer

EEN BIJZONDERE DRIEHOEK MET EEN BEROEMDE NAAM

Het werd weer tijd voor een meetkundige puzzel en wel voor driehoeken met bijzondere eigenschappen. We kijken daartoe naar driehoeken waarvan de drie *cevianen* (= lijnen door een hoekpunt en een punt op de overstaande zijde) *concurrent* zijn (= gaan door één punt). We weten allemaal dat in een driehoek de drie hoogtelijnen, de drie zwaartelijnen en de drie bissectrices daaraan voldoen.



figuur 1

Wij kiezen echter voor drie verschillende cevianen: een hoogtelijn, een zwaartelijn en een bissectrice, elk uit een verschillend hoekpunt. In bepaalde gevallen zijn die ook concurrent in een snijpunt *S*. In het voorbeeld, zie figuur 1, geldt:
$a = 13$, $b = 12$ en $c = 15$. Maar ook stomphoekige driehoeken zijn mogelijk (bijvoorbeeld $a = 277$, $b = 35$ en $c = 308$). Beide zijn voorbeelden met geheeltallige zijden, maar dat hoeft natuurlijk niet per se.
Merk op dat we ons beperken tot een binnenbissectrice, zodat het snijpunt *S* altijd binnen de driehoek ligt.
In het geval dat $\triangle ABC$ recht- of stomphoekig is zal de hoogtelijn moeten komen uit de rechte of stompe hoek.

We gaan de eigenschappen van zulke driehoeken *ABC* bestuderen, ook als de driehoek gelijkbenig is, of een hoek van 90° heeft. Met name het laatste geval was voor ons de aanleiding om hier een puzzel over te maken.
We vonden namelijk dat het resultaat uniek is:
een driehoek waarin op meerdere plaatsen bijzondere verhoudingen voorkomen: de **gulden snede.** Hoewel we geen aanwijzingen op internet vonden die deze eigenschap beschrijven, draagt die driehoek zelfs de naam van een beroemde wetenschapper.

Misschien ten overvloede geven we de stelling van Ceva, die iets zegt over de eigenschappen van drie 'willekeurige' cevianen die concurrent zijn: *het product van de verhoudingen waarin de cevianen de overstaande zijden verdelen is 1.*
Dus $\frac{d}{e}\cdot\frac{f}{g}\cdot\frac{h}{i}=1$. Toelichting en een bewijs is op internet te vinden. Verder kan bijvoorbeeld de bissectricestelling handig zijn, maar die is niet per se nodig. Ook is het leuk om met een programma als *GeoGebra* of *Geocadabra* van Ton Lecluse *(www.geocadabra.nl)* een driehoek met de bedoelde cevianen te tekenen en aan de ligging van de hoekpunten te schuiven tot de cevianen concurrent zijn. Alle vragen kunnen met standaardstellingen uit de vlakke meetkunde worden beantwoord, maar gebruik van andere technieken is natuurlijk ook toegestaan. Maar doe het zo eenvoudig mogelijk.

We beginnen met twee vrij eenvoudige en wellicht handige eigenschappen:

Opgave 1a - Bekijk een driehoek *ABC*, met de concurrente cevianen *AD*, *BE* en *CF*. We kiezen hier voor bissectrice *AD*, zwaartelijn *BE* en hoogtelijn *CF*. We tekenen ook driehoek *DEF*. Een van de zijden van driehoek *DEF* is evenwijdig met een van de zijden van driehoek *ABC*. Welke is dat en geef een bewijs.
Opgave 1b - Een gevolg van vraag a is dat er in de figuur een gelijkbenige driehoek is te vinden. Welke en waarom? (Overigens is dit niet de enige gelijkbenige driehoek in de figuur.)
Voor opgaven 2 en 3 mag je zelf kiezen welke van de lijnen *AD*, *BE* en *CF* respectievelijk bissectrice, zwaartelijn of hoogtelijn is.

Opgave 2 - Als een van de zijden van driehoek *ABC* en een aanliggende hoek is gegeven, zeg lijnstuk *AB* en de richting van *AC*, dan kunnen we bij geschikte keuze zonder te rekenen de driehoek *ABC* construeren. Geef aan bij welke keuze en hoe.
Extra vraag (buiten de puntentelling): Lukt het ook als de lengte van twee zijden zijn gegeven?

Opgave 3 - We kunnen met de lengte van precies drie van de verschillende lijnstukken die er zijn tussen de

verschillende punten (A, B, C, D, E, F en S) een formule opstellen waar driehoek ABC aan moet voldoen willen AD, BE en CF concurrent zijn. We kunnen zelfs een lengte bijvoorbeeld op lengte 1 stellen, zodat de bedoelde formule slechts twee variabelen heeft. De driehoek ligt dan vast.
Bepaal zo'n formule. Natuurlijk zijn er legio mogelijkheden, maar één formule is voldoende.
En hoe eenvoudiger hoe leuker.

Opgave 4a - Nu geldt: $AC = BC$. Er geldt: bij elke keuze van de plaats van hoogtelijn, zwaartelijn en bissectrice blijkt ABC gelijkzijdig. Maak een (handige) keuze en geef een bewijs. Leuker is natuurlijk om het voor alle drie de mogelijkheden te bewijzen, maar één is genoeg voor het maximale aantal punten. (zoek er niet te veel achter, want het bewijs kan eenvoudig.)
Extra vraag (buiten de puntentelling) **4b** - Hetzelfde (driehoek ABC is gelijkzijdig) geldt als een van de hoeken A, B of C 60° is. Bewijs ook dit bij een handige keuze van hoogtelijn, zwaartelijn en bissectrice, of voor alle drie. In het algemeen geldt zelfs: bij een gegeven keuze van de cevianen ligt de driehoek op grootte na vast als er precies één hoek is gegeven.

Opgave 5 - Nu geldt tenslotte: Hoek $C = 90^o$ en daarmee liggen de verhoudingen van de zijden van driehoek ABC vast en ook die waarin D, E en F de zijden van ABC verdelen. Sommige van die verhoudingen zijn de gulden snede. Welke? Bewijs dat. Dit is zelfs puur meetkundig te bewijzen, dus met de standaardtechnieken uit de vlakke meetkunde.

En voor de liefhebbers (buiten de puntentelling), misschien met enig speurwerk: naar welke beroemde wetenschapper is die driehoek vernoemd?

Inzenden oplossingen

Gehele of gedeeltelijke oplossingen kun je weer mailen naar *liekewobien@hotmail.nl* of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811NN Reeuwijk.
Er zijn 20 punten te verdienen voor de ladderwedstrijd en extra punten als wij je idee voor een nieuwe puzzel gebruiken.
De aanvoerder van de ladder ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro. En je hoeft helemaal niet alle vragen te beantwoorden om in te zenden en zo uiteindelijk toch bovenaan de ladder te komen!
Inzendingen moeten uiterlijk op 25 juni 2019 binnen zijn.

vakbladeuclides.nl/946puzzel

Top 10 ladderstand

Tot en met puzzel 94-5		
1	F. van Hoeve	139
2	G. Bouwhuis	133
3	F. Göbel	114
4	H. Bakker	111
5	R. Stolwijk	106
6	B. Groot	102
7	M. Rijnierse	102
8	L. Cizkova	61
9	J. Remijn	58
10	J. Verbakel	55

We feliciteren Frans van Hoeve met de ladderprijs.

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Redactie
Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Sebastiaan Benders
Rob Bosch
Hugo Duivesteijn
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Henk Rozenhart, voorzitter
Gerrit van Wijk

Inzenden bijdragen
Tom Goris, Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Ebrina Smallegange
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie
Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt
met ingang van 1 augustus 2018
- leden: € 87,50
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 65,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden
Abonnementen gelden steeds vanaf nr. 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters
De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2019

vr 23/8 t/m 24/8, vr 30/8 t/m 31/8

AMSTERDAM en EINDHOVEN
Vakantiecursus 'Deep Learning'
Organisatie: Platform Wiskunde Nederland

vr 13/9

EINDHOVEN
Finale wiskunde olympiade 2019

za 02/11

VEENENDAAL
Jaarvergadering / studiedag NVvW
Organisatie: NVvW

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook *vakbladeuclides.nl*

JAARGANG 94

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
7	25 juni 2019	29 april 2019

CASIO®

Casio fx-CG50

Vertrouwde functionaliteit, betrouwbaar en intuïtief te gebruiken

De Casio fx-CG50 heeft een moderne vormgeving, beschikt over een kleurendisplay met hoge resolutie en is voorzien van een makkelijk te gebruiken examenstand. Naast de vertrouwde toepassingen kunt u uw grafische rekenmachine nu ook gebruiken met een extra functionaliteit: programmeren in Python. Hiervoor hoeft u uw Casio fx-CG50 alleen te updaten naar OS versie 3.20. U vindt de update op edu.casio.com.



Programmeer in Python met de Casio fx-CG50

```
GGD.py          001/007
def GGD(a,b):
  r=a%b
  if r==0:
    return b
  else:
    return GGD(b,r)
FILE RUN SYMBOL CHAR A⇔a ▷
```

```
* SHELL Initialized *
>>>from GGD import *
>>>GGD(288,135)
9
>>>GGD(80, 27)
1
>>>|
RUN                A⇔a CHAR
```

Bestel direct uw docentenexemplaar voor maar € 39,50*

Stuur een e-mail naar educatie@casio.nl. Vermeld in de e-mail uw naam, de naam en het adres van uw school, het schooltype en uw mobiele telefoonnummer.

* Inclusief btw en verzending